Um Olhar Humanista sobre os Números Complexos

Carlos Mathias
Universidade Federal Fluminense

João sempre gostou de matemática e, no vestibular, disputará vagas para os cursos de Engenharia Química e Administração. Suas aulas de matemática ocorrem sempre nas terças e quintas-feiras pela manhã e sua dedicação é grande. Seu professor de matemática é um sujeito simpático e entusiasta do potencial pedagógico da resolução de exercícios. Os colegas de João apreciam o professor, acham que ele vai direto ao assunto e que passa os macetes de resolução das questões mais comuns, mas João, ao contrário de seus colegas, sempre reclama da enorme quantidade de exercícios similares, pois gosta de ser surpreendido e de manter em vista as aplicações daquilo que estuda.

Numa certa terça-feira, ao falar sobre polinômios, seu professor colocou:

- Considerem *p(x)* = $x^4 + x^2 + 1$. É fácil ver que *p(x)* não possui raízes reais e, portanto, não é divisível por nenhum polinômio de primeiro grau. De fato, notem que *p(x)* é a soma de parcelas positivas. Lembrem-se: toda vez que o expoente de uma potência for par, ela terá sinal positivo! Assim, o polinômio *p(x)* não pode ter raízes reais, pois ele sempre será maior do que, ou igual a, 1! Na aula de quinta-feira, no entanto, iniciaremos um novo assunto, os números complexos, quando mostrarei que *p(x)* é divisível por um polinômio de segundo grau!

João não entendeu muito bem o que aconteceria na próxima aula, pois ainda analisava os detalhes do tal dispositivo prático de Briot-Ruffini, utilizado por seu professor na resolução de um exercício anterior.

Na manhã da quinta-feira, pontualmente como sempre, seu professor de matemática entra em sala e cumpre sua promessa:

- Bom dia, hoje eu apresentarei a vocês os números complexos! Vocês se lembram do que acontecia quando o delta de uma equação do segundo grau era negativo? Ela não possuía solução, certo? Pois então, hoje mostraremos que, na realidade e durante todo o tempo, ela tinha solução! Permitam-me apresentar o novo conjunto numérico, que chamaremos de $\mathbb{C}$...

Indo ao quadro, o professor escreve:

***Definição**: Chamaremos de conjunto dos números complexos* $\mathbb{C}$*, o conjunto* $\mathbb{C} = \left\{ a + b.i \,/\, a, b \in \mathbb{R}\, ;\, i^2 = -1 \right\}$*, onde i é chamado de unidade imaginária.*

João arregalou os olhos quando viu a igualdade $i^2 = -1$ e, levantando imediatamente sua mão, perguntou:

- Professor, como um número elevado a um expoente par pode ser negativo? Toda potência, cujo expoente é par, é positiva!

- Sim João, é verdade. No entanto, esta propriedade é válida para potências cujas bases são números reais e o número *i* não é um número real. É por isso que chamamos *i* de

unidade imaginária: você *imagina* que existe um número cujo quadrado se iguala a -1... Entendeu?
Após ouvir a resposta de seu professor, João sussurra para o amigo que se sentava ao seu lado na sala:
- Ah! Entendi sim... o que ele quis dizer foi que *agora pode* dar negativo...
João retorna ao seu professor:
-Mas esse número *i* serve para quê? Os números inteiros e as frações estão em toda parte, o $\sqrt{2}$ existe apenas nas aulas de matemática, mas esse número *i*... só agora, em setembro!
Seu professor responde:
- O número *i* tem muitas aplicações, como você verá mais adiante. Os números complexos ampliam o universo de soluções das equações de segundo grau ao máximo, assim, se em um problema precisarmos resolver uma equação deste tipo, o que acontece com bastante frequência, sempre seremos capazes de encontrar soluções para ela. Por exemplo, veja o exercício 38 da página 131 de nosso livro de exercícios. Ele nos pede para encontrarmos as dimensões de um retângulo cujo perímetro seja 20 e cuja área seja 40, como você montaria esse problema? Você teria de resolver uma equação do segundo grau, certo? Este é um exemplo!
João, que não havia feito o tal exercício, logo começou a resolvê-lo e viu que, para obter a sua solução, ele precisaria achar um número *x* para o qual $x.(10-x)=40$. Ao resolver esta equação pela fórmula de Bhaskara, João verificou que o valor de *delta* era negativo e prontamente interrompeu o seu professor, que já havia voltado para o quadro:
- Professor, me perdoe, mas a equação do segundo grau do problema, $x^2-10x+40=0$, não tem solução!
-Errado, João! Existem duas soluções! Veja só, calculando delta, só um minutinho... São os números complexos $5+i\sqrt{15}$ *e* $5-i\sqrt{15}$! - retrucou o professor.
-Mas nunca vi um retângulo com lados medindo isso! Esse retângulo não existe! Pelo menos é isso que eu diria se eu tivesse resolvido este problema na terça-feira! Seria um retângulo imaginário então?
- Não João, o retângulo realmente não existe, nem na terça, nem hoje...
- Mas então para que preciso dos números complexos?
- Mais tarde você verá, vamos adiante, o tempo que temos é curto e o exame de vocês será em novembro...

Algumas Considerações Filosóficas Iniciais

A história fictícia que acabo de narrar foi inspirada em uma situação real, ocorrida há 26 anos. Não me acho um pessimista por acreditar que o que senti naquele dia é semelhante ao que sentem os tantos alunos de hoje, quando o assunto em pauta é *Números Complexos*. Afinal, os números complexos protagonizam um grande drama do Ensino e da Aprendizagem da Matemática na Educação Básica e, no que diz respeito à apresentação do assunto, as coisas não mudaram muito nos últimos 30 anos. Imagino que a análise deste drama se alinha bem aos objetivos desta obra: discutir quais saberes docentes, além do específico e do pedagógico, podem contribuir para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. Minha forma de conduzir tal discussão se dará à luz das Filosofias Socioconstrutivista (Ernest, 1991) e Humanista (Hersh, 1997) da Matemática, vividas na exposição de uma proposta de construção do conjunto dos números complexos (Mathias, 2008), originalmente considerada em um curso de formação continuada de professores de matemática, na Universidade Federal Fluminense.

Muitos dos atuais cursos de Licenciatura em Matemática vêm passando por reformas curriculares que incluem a História da Matemática de modo mais significativo em suas propostas. Isto é algo bom. No entanto, no que diz respeito à Filosofia da Matemática, a história é outra: as propostas de reformulação curricular não guardam mais espaço para que alunos e professores reflitam acerca da natureza da matemática. Mas como estudar, ensinar ou aprender Matemática por meio de um programa de formação que não propõe uma reflexão tão essencial?

O que é Matemática? Enquanto a maioria dos alunos e professores não sabe o que dizer e se coloca de forma evasiva diante de tal questionamento, o senso comum tem na ponta da língua as suas respostas e as suas anedotas: a Matemática é a rainha das ciências exatas, infalível, perfeita, cujos encaminhamentos se dão pelo cálculo e pela lógica do verdadeiro ou falso. Paul Ernest (1991), em seu celebrado *Philosophy of Mathematics Education*, descreveu, analisou e criticou muitíssimo bem esta percepção tão frequente no senso comum, que Jere Confrey denominou de *percepção absolutista da Matemática*. O próprio Confrey a situa como

> *"...a epítome da certeza, das verdades imutáveis e dos métodos irrefutáveis... segura por meio da infalibilidade de seu método supremo, a dedução... Os conceitos em Matemática não são desenvolvidos, são descobertos... as verdades anteriores não são alteradas pela descoberta de uma nova verdade... a matemática assim prossegue pela acumulação de novas verdades matemáticas, como tendo uma estrutura inflexível, definida a priori*." (Confrey *apud* Ernest, 1991)

Mas por que tal percepção da matemática seria a mais difundida no senso comum? Poderia a popularidade absolutista afetar o ensino e a aprendizagem da matemática nas escolas ou, ainda, ser uma consequência do que lá acontece? As percepções absolutistas mais comuns da natureza matemática, no sentido colocado por Confrey, são o *Platonismo (no qual incluo o Logicismo)* e *Formalismo*, sendo a primeira preponderante (Hersh, 1997).

O Platonismo é uma percepção substantiva da natureza matemática que considera a existência objetiva de um mundo ideal e independente da humanidade, no qual residem os objetos matemáticos, sempre verdadeiros, imutáveis e eternos. É comum vermos alunos e professores afirmando, por exemplo, que o Teorema de Pitágoras sempre foi verdadeiro, mesmo antes de sabermos o que era um triângulo. De acordo com esta percepção, uma demonstração do Teorema de Pitágoras seria mais o ato de certificação de uma verdade do que propriamente uma explicação acerca de um fato geométrico, ou um ato de convencimento científico. Matemáticos famosos como os logicistas Gottlob Frege e Bertrand Russel, George Cantor, G. H. Hardy, René Thom e Kurt Gödel eram platonistas.

> *Eu acredito que a realidade matemática reside fora de nós e que a nossa função é descobri-la e observá-la. Os teoremas que provamos e eloquentemente julgamos serem nossas criações são, simplesmente, notas das nossas observações.* (Hardy, 2000)

Uma questão interessante foi levantada por Benacerraf (1983): como o matemático platonista aprenderia matemática? O ato de aprender pressupõe uma relação de causa e efeito entre o conhecedor e o alvo de conhecimento. Assim, no caso do matemático platonista, seria impossível qualquer relação entre os dois, uma vez que cada um pertence a um universo diferente (Aspray e Kitcher, 1988). Ficaria ao encargo da *intuição* do matemático conectá-lo ao mundo ideal da Verdade e a ele conceder algum tempo para a observação dos objetos que lá residem? Mas como se estabeleceria tal transcendência? Não há respostas.

O Formalismo, por sua vez, é a percepção de que a matemática é um jogo de manipulação dos símbolos de uma determinada linguagem formal, por meio de determinadas regras de inferência, *sobre os quais interpretações são consideradas irrelevantes*. Para o formalista, a intuição é externa à matemática e ao jogo que a constitui. O adjetivo *intuitivo* é considerado um sinônimo de *informal*, *fora das regras* e *sem rigor*. Nesta percepção, o Teorema de Pitágoras não é um objeto matemático, é apenas o resultado da manipulação dos axiomas euclidianos, previamente adotados. A argumentação apoiada em análises realizadas sobre figuras, ou por meio de um apelo geométrico mais significativo, não é aceita como uma demonstração formal, por ser *intuitiva* e, portanto, fora das regras do jogo.

Até a metade do século XIX, a Geometria Euclidiana era a referência da "verdade *a priori*" da matemática. No entanto, após os trabalhos de Bolyai, Lobatchevsky, Riemman e Klein, que apresentaram modelos geométricos não euclidianos, tal referência foi enfraquecida. O programa formalista proposto por David Hilbert no início da primeira metade do século XX buscou uma alternativa para superar tal fragilização: provar a *consistência* da matemática. Para isso, reduziria todas as suas demonstrações clássicas a sequências finitas de derivações iniciadas sobre um conjunto de axiomas, estabelecidas por meio de um conjunto de regras combinatórias, chamado *metamatemática*. Ainda que, na década de 30 do século XX, Kurt Gödel mostrasse que o programa de Hilbert jamais conseguiria atingir seus objetivos, o Formalismo ainda seria revisitado pelo grupo Bourbaki durante as décadas de 50 e 60 daquele mesmo século e seus ecos chegariam às nossas escolas por meio do Movimento da Matemática Moderna.

O jogo formalista ignora todos os aspectos socioculturais que permeiam as práticas matemáticas. A História, quando considerada, é desvinculada por completo da Filosofia da Matemática e cumpre apenas um papel informativo; a função da intuição humana é

tão somente preencher a lacuna existente entre o jogo *per se* e os aspectos mais empíricos da matemática. Baseado em quê um matemático formalista escolhe seus axiomas e suas regras? Não seriam essas escolhas resultados de processos históricos anteriores? O matemático formalista poderia responder afirmativamente a esta última pergunta, mas certamente não reconheceria tais processos como integrantes da matemática.
Lakatos(1976), sob influência dos trabalhos de Polya e Popper, proferiu um crítica feroz à filosofia formalista em seu célebre *Provas e Refutações*:

> *...na Filosofia Formalista, não há lugar adequado para a metodologia como lógica do descobrimento. De acordo com os formalistas, matemática é matemática formalizada. Mas que se pode descobrir numa teoria formalizada? Duas espécies de coisas. Primeiro, pode-se descobrir a solução de problemas que a máquina de Turing devidamente programada poderia resolver em tempo finito(...) Segundo, pode-se descobrir soluções para problemas em que só se pode ser orientado pelo "método" do "vislumbre indisciplinado e boa sorte".*
> *Ora, essa alternativa sombria entre o racionalismo da máquina e o irracionalismo da suposição cega não prevalece no caso da matemática viva: uma investigação de matemática não formal ensejará a fecunda lógica situacional, que nem é mecânica nem irracional, mas que não pode ser reconhecida e muito menos estimulada pela filosofia formalista. (...) a filogênese e a ontogênese do pensamento matemático não podem se desenvolver sem a crítica e rejeição definitiva do Formalismo*. (Lakatos, 1976)

Fora do pequenino grupo acadêmico composto por filósofos e historiadores, platonismo e formalismo são palavras que carregam apenas significados coloquiais, quando conectados à Matemática. Assim, é natural que não encontremos mais, pelos corredores das escolas e das universidades, matemáticos que se intitulem "formalistas" ou "platonistas". O que encontramos em abundância, no entanto, são discursos elaborados por meio de slogans que flertam com as duas percepções apresentadas e que voam aos sabores do que está instituído socialmente acerca da matemática; slogans que rechaçam as discussões mais desconfortáveis e exigentes, que poderiam escapar do viés absolutista. Esses discursos, vividos na rua e nas instituições de ensino, entremeados e cimentados pelo tempo, aleijam o reconhecimento que deveríamos ter do poder das *nossas contribuições* mais profundas e criativas na Matemática. Eles ignoram boa parte das especificidades do seu ensino e aprendizagem, quando desconsideram os aspectos de ordem didática, cognitiva e psicológica, inerentes às práticas matemáticas. Por isso, tornam-se incapazes de justificar para o aluno os motivos pelos quais ele não compreendeu algum assunto em matemática: quais seriam os possíveis motivos da incompreensão do conceito de número complexo, por exemplo? Ou a inabilidade inata de transcender ao mundo matemático ou a incapacidade de compreender a estrutura do jogo que é colocado. A tragédia elitista tem aí o seu início.

Hersh(1997) destaca duas colocações feitas por Jean Diedonné e Paul Cohen, que indicam a tendência de aproximação dos dois olhares absolutistas na metade do século XX e que se confirmaria diante da conveniência e do tempo, no senso comum:

> *Nós acreditamos na realidade matemática, mas é claro que, quando os filósofos nos atacam com seus paradoxos, nós corremos, nos escondemos por detrás do formalismo, dizemos "A Matemática é apenas um jogo de símbolos sem sentido", e, logo após, sacamos do bolso os capítulos 1 e 2 sobre Teoria dos Conjuntos. Quando finalmente somos deixados em paz, nós voltamos para a nossa matemática e a fazemos como sempre a fizemos, com a sensação que todo matemático sente, a de estar trabalhando com algo real. Essa sensação é provavelmente uma ilusão, mas é bastante conveniente. Essa é a postura do Grupo Bourbaki, no que diz respeito aos Fundamentos* (da Matemática). *(*Dieudonné *apud* Hersh, 1997*)*
>
> *Para o matemático comum, que apenas busca saber se o seu trabalho está bem fundamentado, a escolha mais atraente é evitar quaisquer dificuldades por meio do Programa* (Formalista) *de Hilbert. Neste ponto, a Matemática estará sendo considerada como um jogo formal e a única questão considerada será a consistência... A posição platônica é provavelmente aquela que a maioria dos matemáticos preferirá tomar. Será apenas no momento em que surgirem algumas dificuldades acerca da Teoria dos Conjuntos que tal posição será questionada. Se essas dificuldades de fato causarem algum incômodo* (no matemático), *ele correrá para o abrigo do Formalismo, no entanto sua posição normal acabará ficando entre as duas, tentando aproveitar o melhor dos dois mundos.* (Cohen *apud* Hersh, 1997)

A esperança em novos ares: Socioconstrutivismo e Humanismo

Em 1947, o antropólogo Leslie Alvin White (White, 2000) situou de forma esclarecedora, em seu belo texto *The Locus of Mathematical Reality: an anthropological footnote,* um sentido no qual poderia se dar a natureza objetiva da matemática. O ponto de partida de White foi a análise das seguintes proposições:

1- As verdades matemáticas possuem existência e validade independente da mente humana
2- As verdades matemáticas não possuem existência ou validade à parte da mente humana

Os platonistas consideram a existência extra-humana de objetos matemáticos, enquanto os formalistas reduzem a Matemática ao jogo sintático inumano. Para o platonista, apenas a primeira proposição é verdadeira e, para o formalista, apenas a segunda. Neste sentido, as duas percepções absolutistas se opõem, o que é algo surpreendente haja vista os argumentos que apontam a concomitância social atual de ambas.

A análise de White acerca de suas proposições é notável:

> *Ambas* (as proposições) *podem ser e, de fato são verdadeiras. A realidade matemática se coloca na tradição cultural sobre a qual o indivíduo nasce e, portanto, é apreendida de fora para dentro. Mas, fora da tradição cultural, conceitos matemáticos não existem, nem, tampouco, a própria tradição cultural existe externamente à espécie humana. As realidades matemáticas têm, portanto, uma existência independente da mente do indivíduo, mas que é totalmente dependente da mente da espécie. (...) A matemática em sua totalidade, as suas "verdades" e "realidades" são parte da cultura humana e nada mais.* (White, 2000)

Isto é, a realidade matemática não é mental, nem física é *social*.

> *Homens como G.H.Hardy, que sabem, por meio da sua própria experiência, assim como da observação (das experiências) dos outros, que as realidades matemáticas são apreendidas pela mente de fora para dentro, compreensivelmente - mas erroneamente - concluem que elas têm a sua origem e localização no mundo externo, independente do homem. Isto é errado, porque a alternativa equivalente a "fora da mente humana", a mente individual, não é "o mundo externo, independente do homem", mas sim a cultura, o corpo intelectual e comportamental tradicional da espécie humana*. (White, 2000)

O trabalho de White acerca da realidade cultural da matemática influenciou significativamente o trabalho de Reuben Hersh que, em 1997, apresentou a *Filosofia Humanista da Matemática* em seu "*What is Mathematics, Really?"*. A percepção de Hersh se aproxima do Socioconstrutivismo proposto por Ernest (1991, 1998) e se alinha naturalmente ao Pragmatismo de John Dewey (1997). Hersh e Ernest fazem propostas iniciadas sobre o quase-empirismo de Lakatos(1976) e, no caso de Ernest, no convencionalismo de Wittgenstein (1953, 1978).

> *Uma vez criados e comunicados, os objetos matemáticos se destacam do seu criador e tornam-se parte da cultura humana. Nós o apreendemos como objetos externos, dos quais algumas propriedades são conhecidas e outras desconhecidas. Dentre as propriedades desconhecidas, há algumas que conseguimos descobrir. Algumas, no entanto, nós não conseguimos descobrir, ainda que tais objetos sejam nossas criações. Isso parece ser paradoxal? Se sim, é por conta do pensamento que apenas reconhece duas realidades: o sujeito individual e o mundo físico exterior. A existência da Matemática mostra a inadequação de tais categorias. Os costumes, as instituições de nossa sociedade são reais, ainda que não internamente ao sujeito ou, externamente, no mundo inumano. Eles são uma diferente realidade, uma realidade sociocultural e histórica. A Matemática é este terceiro tipo de realidade – interna à sociedade como um todo e externa ao indivíduo, como eu e você.* (Hersh,1997)

> *Os pontos de partida para se descrever o conhecimento matemático como uma construção social (...) são: Considerar a base do conhecimento matemático como sendo linguística, e* (observar que) *a linguagem é uma construção social; Processos sociais intersubjetivos são necessários para tornar o conhecimento matemático do indivíduo, quando público, em um conhecimento matemático objetivamente aceito; A objetividade, em si, deve ser considerada social.* (Ernest, 1991)

O Humanismo e o Socioconstrutivismo, ao considerarem a realidade social da Matemática, defendem a percepção de que ela (a Matemática) é *feita por nós*, isto é, por meio das ações e retroações vividas entre os sujeitos, a sociedade e a cultura. Mais ainda, reconhecem os fatores psicológicos, sociológicos e históricos de todas as partes como *constituintes* da matemática, do seu ensino e de sua aprendizagem. A Intuição deixa de ser uma justificativa para a escolha de axiomas ou um meio de conexão transcendental entre o indivíduo e um mundo ideal, e passa a ser a base do conjecturar impulsivo, a partir do qual terá início a experiência que proporciona o refinamento sucessivo dos objetos matemáticos, pelo erro e pela revisão.

As demonstrações não são atos de certificação de verdades *a priori* ou a manipulação metamatemática sem sentido, mas sim resultados obtidos em circunstâncias inerentes ao meio sociocultural e aos desejos do matemático que *demonstra*. O objetivo final de uma demonstração é dar *uma explicação* que sobreviva ao crivo do indivíduo, da escola, do meio científico e do meio sociocultural. A sua necessidade, o seu aspecto, o seu tipo e a sua função devem, então, ser determinados pelos próprios meios que a demonstração perpassa. Neste sentido, o verbo *demonstrar* ganha destaque, em detrimento do substantivo *demonstração*, situando uma ação fundamental do matemático, que tem início na *necessidade* e interrupção na *suficiência*, parâmetros socioculturais.

Antes de iniciar as considerações sobre os números complexos, peço que o leitor esteja atento a uma última colocação: por conta do seu caráter social, à matemática se agregarão todas as formas pelas quais ela é considerada culturalmente. Portanto, ainda que as percepções absolutistas ignorem os aspectos socioculturais da matemática, elas são parte dela nos exatos termos que refutam. Diversos parâmetros da relação existente entre os alunos e professores de matemática são estabelecidos por meio da convivência das percepções que cada um tem, acerca da Matemática, e daquelas outras já presentes no meio do trabalho, no meio escolar e no meio científico. Por isso, é fundamental que as discussões seguintes, que seguirão o viés humanista, ganhem força suficiente nos cursos de formação de professores.

Os Números Complexos e a História de João

Os livros didáticos de matemática do Ensino Médio tradicionalmente definem os números complexos de duas maneiras, dentre as quais a primeira, apresentada pelo professor de João, é preponderante:

Definição 1*: Chamaremos de conjunto dos números complexos* $\mathbb{C}$*, o conjunto* $\mathbb{C}=\left\{a+b.i\,/\,a,b\in\mathbb{R}\,;\,i^2=-1\right\}$*, onde i é chamado de unidade imaginária.*

Definição 2*: Chamaremos de conjunto dos números complexos* $\mathbb{C}$ *o conjunto* $\left(\mathbb{R}^2,+,\bullet\right)$*, onde + e* $\bullet$ *são as operações definidas por:*
$\left(x_1,y_1\right)+\left(x_2,y_2\right)=\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right)$ e $\left(x_1,y_1\right)\bullet\left(x_2,y_2\right)=\left(x_1.x_2-y_1.y_2,x_1.y_2+x_2.y_1\right)$, *onde as operações utilizadas entre as coordenadas são as operações usuais reais. Se chamarmos de i o número complexo (0,1) e identificarmos os números reais x aos pares complexos* $\left(x,0\right)$*, poderemos escrever os elementos de* $\mathbb{C}$ *na forma* $x+y\bullet i$.

A condução feita pelo professor de João durante o desenvolvimento da história flerta com a percepção platônica, sobretudo no momento em que a definição 1 é enunciada. Note que o número *i* não foi *definido,* ele foi *apresentado* sem quaisquer justificativas, como algo *a priori*. Alguns colegas não toleram minha crítica neste ponto, dizem que isso é algo comum na matemática e, de fato, é. No entanto, a questão central que coloco é: *deveria* ser comum na escola?
Dois fatos que envolvem a definição 1 expõem fragilidades conceituais e pedagógicas:

a) Uma definição que busca situar o que é um número complexo não poderia utilizar um número complexo para atingir o seu objetivo.

O número *i,* chamado de unidade imaginária, é um número complexo. Assim, não devemos utilizá-lo para definir *o que é um número complexo geral, sem antes tornarmos preciso o seu significado.* O que foi feito é tão tautológico quanto "sal é salgado" ou "Alcateia é o coletivo de lobo e os lobos são os indivíduos que compõem a alcateia". São truísmos que fazem sentido apenas em si, mas que falham quando a intenção pedagógica original é tornar preciso o sabor do sal, ou o significado de lobo.

b) *Ao escrever* $a+b.i$ *e* $i^2=-1$*, omitiu-se o fato de que as operações de soma e produto presentes não são as mesmas utilizadas até a aula anterior, quando o universo numérico do curso era o conjunto* $\mathbb{R}$ *e, consequentemente, as operações eram definidas apenas entre números reais.*

Na aula de terça-feira o professor de João disse que toda potência, cujo expoente é par, era positiva, ou seja, que $x^2=x.x\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, onde . indica a operação de produto *real*. Este é um fato inalterável por qualquer ato da nossa imaginação. Até terça-feira, a turma de João trabalhava sobre o conjunto $\mathbb{R}$ e, portanto, as operações utilizadas eram *a soma e o produto reais.* O que aconteceu na quinta-feira, diferentemente do que disse o professor de João, não foi um ato da imaginação útil à expansão do universo algébrico, foi, sim, um ato de omissão sobre a utilização de *novas operações de soma e produto*, que ainda careciam de definição e que, inadvertidamente, foram representadas pelas mesmas notações utilizadas nas operações reais. A Definição 1, portanto, ao enunciar a igualdade $i\,.\,i=-1$ conclui um disparate tosco, apresentando uma operação de produto desconhecida, entre dois números que, naquele momento, não faziam o menor sentido.

A Definição 2 foi aquela utilizada para definir os números complexos durante o período da Matemática Moderna e segue sendo utilizada até os dias de hoje, ainda que sem a mesma popularidade. Sobre ela não repousam fragilidades tão grosseiras quanto aquelas presentes na definição 1, mas há uma questão filosófica importante que deve ser observada, por ter consequências pedagógicas imediatas. A definição 2 apresenta duas operações sobre o conjunto $\mathbb{R}^2$, das quais segue, por exemplo, que $(0,1)\bullet(0,1)=(-1,0)$. No entanto, antes mesmo que os alunos verifiquem tal igualdade formalmente, eles perguntam: que operação de produto é essa? Se despirmos a Definição 2 da "impecabilidade matemática" que a ela foi atribuída durante anos, nada mais veremos além da proposta "Caro aluno, a fim de compreender a igualdade $i^2=-1$, de forma absolutamente trivial e sem sentido algum neste momento, você acolheria a escolha injustificada do produto $(x_1,y_1)\bullet(x_2,y_2)=(x_1.x_2-y_1.y_2,x_1.y_2+x_2.y_1)$?". Este é um exemplo típico do *círculo hermenêutico* constantemente oferecido pelos caminhos formalistas: a escolha de axiomas é justificada pela força do resultado final a que eles servem e esse, por sua vez, após tornar-se óbvio intuitivamente ou inevitável, por conta de sua demonstração formal, revisita as suposições iniciais que nele se desdobraram, como a evidência estrondosa e definitiva da coerência alegada para legitimá-las. É assim que, ingenuamente, a cegueira se traveste de satisfação.

A Proposta Humanista (Mathias, 2008)

A associação das equações de segundo grau ao surgimento dos números complexos não é natural, seja no ponto de vista histórico ou didático. Quase sempre esta associação se dá sob o pretexto da expansão do universo algébrico de atuação das equações, como ocorreu na história de João. No entanto, na escola, as variáveis dos problemas cotidianos que motivam o estudo das referidas equações são, essencialmente, quantitativas (*reais*): número de objetos, medidas como comprimento, área, massa, tempo, velocidade, etc. Assim, como boa parte dos números complexos não é capaz de representar tais *quantidades*, digo, não é possível comermos $(1+i)$ pãezinhos ou termos um quadrado com lados medindo $5+i\sqrt{15}$ metros, a justificativa dada na escola para estudarmos os números complexos não é alcançável por meio dos problemas que a própria escola coloca, por intermédio de seus professores e dos livros didáticos. Sem uma leitura que viabilize a reavaliação da aplicabilidade dos números complexos, será compreensível julgarmos que a expansão algébrica não é suficiente para mantê-los nas atuais propostas curriculares. Afinal, o que se ganharia algebricamente em tal expansão é inútil para a melhor compreensão e interpretação dos problemas apresentados.

Para que os números complexos tornem-se mais plausíveis, precisaremos buscar uma *nova concepção numérica*, capaz de renovar a percepção que nossos alunos têm das práticas matemáticas cotidianas, que atuam essencialmente sobre questões de contagem ($\mathbb{N},\mathbb{Z}$) e de medida ($\mathbb{Q}\, e\, \mathbb{Q}'$). Esta nova concepção numérica estará ligada à capacidade natural que os números reais possuem para *realizar transformações geométricas.*

Durante o Movimento da Matemática Moderna, o ensino de geometria se deu, essencialmente, por meio do tratamento axiomático iniciado sobre variações da proposta de Hilbert, atribuídas a Birkhoff e Moise, ou por meio do estudo das estruturas algébricas de conjuntos de transformações geométricas, influenciado por determinados aspectos do Programa de Erlangen de Klein (Fehr, 1962). Na época, a maioria dos professores não se sentia pronta para trabalhar os conceitos geométricos segundo uma abordagem ou outra, o que gerou imensas dificuldades no ensino da geometria e reforçou olhar crédulo na sua cisão com o ensino da álgebra. Este olhar, que está vivo em nossas escolas até os dias de hoje, justifica o desapego curricular pelos números complexos, que se colocam exatamente entre as duas perspectivas.

A alternativa que propus em (Mathias, 2008) e que apresentarei a seguir de forma abreviada, fez uso das transformações geométricas na construção dos números complexos, no entanto, elas foram encaminhadas de modo completamente distinto daquele vivido na época da Matemática Moderna. As ideias de Wessel e Argand colocadas no final do século XVIII e durante o século XIX, que percebiam os números complexos como *operadores geométricos*, foram retomadas numa perspectiva humanista, *distante do apego pelas estruturas algébricas e vetoriais* e fazendo uso do software de geometria dinâmica *Régua e Compasso* (R.e.C) para exemplificar as etapas da construção na escola. O texto a seguir apresenta apenas o fulcro da ideia e exclui as propostas de adaptação para a sala de aula, por meio do software R.e.C. O leitor interessado em conhecer tais propostas deverá consultar o texto original (Mathias, 2008).

Relendo a concepção de número real

Os números reais foram eleitos, entre outras coisas, para representarem aspectos e resultados de práticas de *contagem* e de *medida*. As circunstâncias nas quais tais práticas se dão são bastante variáveis e, por isso, as denominaremos de modos diferenciados.

Dividiremos as práticas de contagem em duas categorias não disjuntas: *contagens simples* e *contagens contextuais*. As contagens simples são aquelas que percebem os seus alvos de contagem de modo mais *substantivo e livre de contextos pessoais, circunstanciais ou temporais*. De modo mais sucinto, uma contagem simples é aquela livre, pelo menos em um primeiro momento, da intenção de contextualização.

As contagens contextuais, por sua vez, são aquelas que detêm, sobre os seus alvos, orientações de qualidade, sensação ou contexto, e são os processos de contagem destinados à comparação de estados no espaço e no tempo.

Colocações resultantes de contagens simples:

1) *Meu diário de classe possui 57 nomes;*

2) *Comprei 4 sabonetes;*
3) *Meu pai me deu 5 notas de R$1,00;*
4) *Ele deu 4 exemplos de contagens simples.*

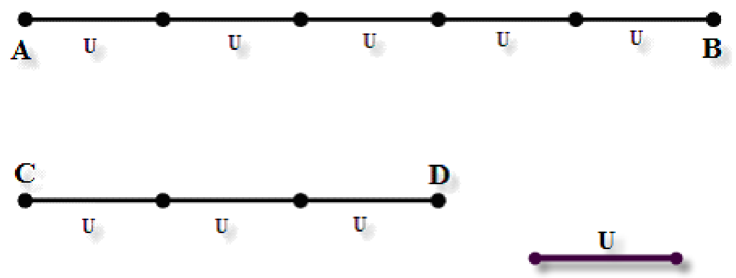
Colocações resultantes de contagens simples e contextuais (ver tabela):

5) *Por causa da chuva, 8 alunos faltaram e apenas 49 vieram;*
6) *Comprei 6 sabonetes, dois a mais do que eu realmente precisava;*
7) *Estou devendo R$5,00 para o meu pai;*
8) *Com a entrada da frente fria, a temperatura caiu 13 graus!*
9) *Ele deu 5 exemplos de contagens contextuais, um a mais do que havia dado sobre contagens simples. (Ou: ele deu 4 exemplos de contagens simples, um a menos do que havia dado para contagem contextual)*

Os números naturais ($\mathbb{N}$) são objetos construídos socialmente, que perpassam as contagens simples. O mesmo pode ser dito sobre os números inteiros ($\mathbb{Z}$), no que diz respeito às contagens contextuais.

Exemplo	**Classe de contagem**	**Contexto e orientação**	**Representação dos resultados da contagem (por classe)**
1	Simples	-	57
2	Simples	-	4
3	Simples	-	5
4	Simples	-	4
5	Simples e contextual	*Comparação com a quantidade original de alunos (57).* *Orientação adotada: presença*	Simples: 8, 49 Contextual : -8
6	Simples e contextual	*Comparação com a quantidade necessária de sabonetes (4)*	Simples:6 Contextual: 2
7	Contextual	*Estado das relações financeiras entre pai e filho.* *Orientação adotada: favorável a quem receberá crédito ao final (pai)* *Dinheiro não foi dado, foi emprestado*	-5
8	Contextual	*Comparação entre as temperaturas de antes da entrada da frente fria e a atual.* *Orientação crescente (definida pela sensação crescente de calor)*	-13
9	Simples e contextual	*Comparação entre a quantidade de exemplos fornecidos para cada uma das 2 classes de processos de contagem* *Orientação Variável*	Simples: 5 Contextual: 1 (5 = 4 +1) Simples: 4 Contextual: -1 (4 = 5 -1)

As práticas de medida, que aqui estarão unicamente associadas a segmentos de reta, serão também divididas em duas categorias: *as medidas racionais* e *as medidas irracionais*. Assim como nas contagens, as práticas de medida poderão ser simples e contextuais.
Os processos racionais de medida são aqueles cujos *atos de comparação com a unidade escolhida se dão por meio de um, ou mais, processos de contagem* (*simples ou contextuais, respectivamente).* Os processos irracionais de medida são aqueles que *não comportam processos de contagem sobre seus atos de comparação*.
A escola pitagórica considerava a contagem como um processo matemático essencial e capaz de caracterizar todos os demais processos matemáticos. O declínio desta escola se deu, justamente, por conta da perpetuação de tal crença sobre os processos de medida. Os exemplos abaixo apresentam a diferença entre os processos racionais e os processos irracionais de medida.



Inicialmente consideremos um problema de medida (*de comprimento)* de segmentos, cuja unidade de comprimento é **U**. Por meio de um processo de contagem simples, vemos que o segmento AB contém 5 vezes a unidade **U**, o que significa dizer que o comprimento $\overline{AB}$ é igual 5. Este seria um processo racional de medida, que compara um segmento diretamente com a unidade de comprimento **U**, por meio de uma contagem simples.
Como qualquer segmento pode ser dividido em um número qualquer de partes com o mesmo comprimento, uma questão fundamental que deve ser respondida é: dados *dois* segmentos, AB e CD, eles podem ser *simultaneamente medidos por meio de contagens comparativas a uma mesma unidade* **U**? Dois segmentos AB e CD são ditos *comensuráveis* quando a resposta a esta pergunta é afirmativa. O processo racional de medida mais geral é, portanto, aquele obtido por meio da comparação de dois segmentos comensuráveis. Na figura acima, ao considerarmos o comprimento $\overline{CD}$ como a nova unidade **U** de comparação, diremos que a medida do segmento $\overline{AB}$ é igual a $\frac{5}{3}$ e escreveremos $\overline{AB} = \frac{5}{3} \cdot \overline{CD}$. Desta forma, os elementos do conjunto $\mathbb{Q}$ acabam representando naturalmente os resultados de processos racionais de medida, sejam eles simples ou contextuais.

No entanto, se considerarmos os segmentos AB e AC como o lado e a diagonal de um mesmo quadrado, não será difícil verificarmos que eles não são comensuráveis. De fato, se os dois segmentos fossem comensuráveis, haveria um número racional $\frac{m}{n}$ capaz de representar o comprimento $\overline{AC}$, comparativamente à unidade de comprimento definida por $\overline{AB}$. Isto é algo absurdo, uma vez que, pelo Teorema de Pitágoras, temos $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AB}^2$ e isto implicaria $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, o que sabemos ser impossível, para quaisquer *m* e *n inteiros*. Assim, o processo de medida do comprimento $\overline{AC}$, em relação à unidade **U** definida pelo comprimento $\overline{AB}$, é *irracional*, isto é, ele não admite processos de contagens anteriores capazes de comensurar os segmentos apresentados.

O conjunto dos números irracionais $\mathbb{Q}'$ reúne todos os possíveis resultados dos processos irracionais de medida, sejam eles simples ou contextuais. Se escolhermos dois pontos quaisquer sobre uma reta e considerarmos o segmento definido por eles como a unidade **U** utilizada na medida de um segmento qualquer, então tal medida se dará por meio de um processo racional ou irracional, o que, de certa maneira, caracteriza bem a continuidade dos processos de medida representados pelo conjunto real $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' \approx$ reta escolhida.

Uma leitura das múltiplas facetas de um número real

Nas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental, particularmente dos 8º e 9º anos, é comum vermos a cadeia de inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset (\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}') = \mathbb{R}$, ou algum diagrama equivalente. O número natural 4 é, também, inteiro, racional e real. Podemos pensar sobre esta afirmação de duas maneiras, a primeira é a mais comum em nossas escolas e enfoca apenas a disposição da sequência de inclusões dos conjuntos:

"Já que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset (\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}') = \mathbb{R}$, então $4 \in \mathbb{N} \Rightarrow 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 4 \in \mathbb{R}$".

A segunda é mais sensível à questão contextual. Por exemplo, o número 4 pode ser lido como resultados de diferentes práticas (de contagem e de medida) que pertencem aos conjuntos que compõem a cadeia de inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset (\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}') = \mathbb{R}$.

Exemplificando os diferentes "quatros":

a) Comprei quatro tocos de madeira na loja de móveis para usá-los como suporte da mesa de jantar. (4 no contexto $\mathbb{N}$ *- Contagem simples);*

b) Como a loja não tinha tocos de pinho, ela me emprestou 4 tocos de jacarandá para que eu pudesse utilizar a mesa, enquanto os tocos de pinho não chegassem. (4 no contexto $\mathbb{Z}$ *- Contagem Contextual, na orientação favorável ao cliente da loja, no caso, a mim);*

c) Todos os tocos possuem 1 metro de comprimento. Antes de prendê-los na mesa, irei usá-los para verificar se a entrada da garagem tem realmente 4 metros de largura. (4 no contexto $\mathbb{Q}$ *- Processo racional de medida);*

d) Ao alinhar os tocos no chão para medir a entrada da garagem, tive dificuldade para mantê-los alinhados. Peguei minha trena e, após estendê-la continuamente, verifiquei *que a medida realmente estava correta, 4 metros! (4 no contexto* $\mathbb{R}$ *- processo de medida encaminhado de modo contínuo).*

Ações geométricas: a nova concepção numérica

Os números reais poderiam representar resultados de alguma outra prática, que não o medir e o contar? A resposta é afirmativa: os números reais podem representar determinadas *ações geométricas*, sobre as quais falarei detalhadamente, a seguir. Será por meio da extensão de tais ações ao plano que construiremos o conceito de número complexo.

Suponhamos que o nosso universo seja a reta $\left(\mathbb{R},+,\bullet\right)$, isto é, nos imaginemos como os *habitantes* desta reta, seres unidimensionais que desconhecem qualquer referência exterior a ela. A partir deste momento, conhecemos apenas as operações de soma e produto reais e os dois sentidos *contextuais*, que são estabelecidos pela relação usual de ordem $\leq$, ao longo dos quais podemos caminhar livremente. Recolocando a situação para o leitor mais crítico, se fizermos um paralelo com os elementos tradicionais que caracterizam um *vetor* (módulo, direção e sentido), conseguiremos, como habitantes da reta, perceber apenas alterações de *sentido* e de *módulo*. Alterações de direção não nos são plausíveis, uma vez que a própria geometria da reta limita a nossa percepção delas. Mais precisamente, dado um segmento AB, poderemos percorrê-lo do ponto A ao ponto B ou do ponto B ao ponto A, e, ao fazermos isso, em ambos os casos, estaremos caminhando um comprimento $\overline{AB}$. Se alguém nos perguntar se estamos andando para cima ou para baixo, não entenderemos o sentido da pergunta. Por isso, mais acima, me referi ao *sentido vetorial* por *sentido contextual*. Acho que tal denominação é mais fiel à sensação daquele que *habita* a reta, é mais nativa e orgânica. Para aqueles que habitam a reta, não podemos dizer que "toda direção tem dois sentidos", afinal, estes habitantes não compreendem a noção de direção; para eles, a noção de sentido é puramente contextual, mais associada à relação de ordem do que à percepção clássica do sentido vetorial, atingível apenas por um observador que é externo à reta.

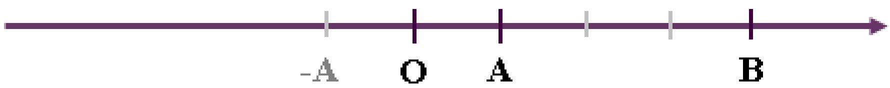
Agora, apresentaremos *uma quinta forma de percebermos o número 4*, que exemplificará a nova percepção numérica proposta. Dado um ponto A sobre a nossa casa, a reta real, consideremos o segmento OA. O número 4 pode promover duas transformações geométricas:

1. **Transformação de Translação.**

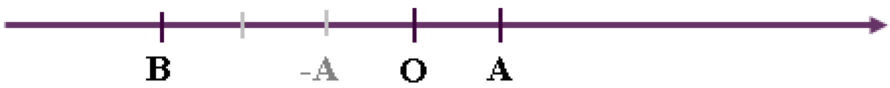
$T_4^+ :\ \left(\mathbb{R},+,\bullet\right) \to \left(\mathbb{R},+,\bullet\right)$, definida, para cada ponto *A* da reta, por $T_4^+(A) = B$, onde *B* é o ponto da reta obtido *pela translação do ponto A, ao longo do sentido contextual positivo (ordem crescente), por um comprimento igual a 4.* O número real -3 representará a transformação geométrica $T_{-3}^+ :\ \left(\mathbb{R},+,\bullet\right) \to \left(\mathbb{R},+,\bullet\right)$, definida por $T_{-3}^+(A) = B$, onde *B* é o ponto da reta obtido pela translação do ponto *A, ao longo do sentido contextual negativo, por um comprimento igual a 3. De um modo geral, um número real x pode ser relido geometricamente, por meio da operação de soma +, através da transformação* $T_x^+ : (\mathbb{R},+,\bullet) \to (\mathbb{R},+,\bullet)$, definida por $T_x^+(p) = p + x$. *Dado um segmento da reta real, ao aplicarmos esta transformação sobre cada um dos pontos que o compõem, estaremos simplesmente deslocando-o, sem que haja alteração de seu comprimento. Podemos reler a expressão 3+4=7 como "a composição das transformações de translação* T_4^+ *e* T_3^+ *é igual a transformação de translação* T_7^+ *", isto é, ao efetuarmos, ao longo do sentido contextual, um deslocamento de comprimento 4 e depois, no mesmo sentido, outro de comprimento 3, teremos um deslocamento resultante de comprimento 7, ao longo do sentido contextual positivo. Poderíamos, de modo geral, escrever* $T_x^+ \circ T_y^+ = T_y^+ \circ T_x^+ = T_{x+y}^+, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

2. Transformação de Homotetia em relação à origem O.

Considere $T_4^\bullet : (\mathbb{R},+,\bullet) \to (\mathbb{R},+,\bullet)$, definida, para cada ponto *A* da reta, por $T_4^\bullet(A) = B$, onde *B* é o ponto da reta mais próximo de *A* do que do seu oposto, –*A*, tal que $\overline{OB} = 4 \bullet \overline{OA}$.



Mais precisamente, o número 4 é o representante da transformação geométrica *que preserva o sentido contextual e quadruplica comprimentos* (módulo). O número real -3 representará a transformação geométrica $T_{-3}^\bullet : (\mathbb{R},+,\bullet) \to (\mathbb{R},+,\bullet)$, definida, para cada ponto *A* da reta, por $T_{-3}^\bullet(A) = B$,, onde *B* é o ponto da reta, *mais próximo do oposto de A*, do que do próprio A, tal que $\overline{OB} = 3 \bullet \overline{OA}$. Mais precisamente, o número -3 é o representante da transformação geométrica que *inverte o sentido contextual e triplica comprimentos* (módulo).



De um modo geral, um número real x pode ser relido geometricamente, por meio da operação de produto $\bullet$*, através da transformação* $T_x^\bullet : (\mathbb{R},+,\bullet) \to (\mathbb{R},+,\bullet)$*, definida por* $T_x^\bullet(p) = x \bullet p$. *Isto é: um número real x, quando aliado à operação de produto, atuará sobre o sentido contextual dos segmentos AO* (conforme seja o sinal de *x*) *e sobre os* *seus comprimentos, que serão multiplicados pelo fator* $|x|$. *Analogamente ao visto na transformação de translação associada à operação de soma +, temos* $T_x^\bullet \circ T_y^\bullet = T_y^\bullet \circ T_x^\bullet = T_{x\bullet y}^\bullet, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

De um modo geral, dado $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$x > 0$	*(+)Representa a transformação geométrica que desloca, por um comprimento x, ao longo do sentido contextual positivo (entenda crescente, relativamente a* $\leq$*) ;* *(•)Representa a transformação geométrica que preserva o sentido contextual e multiplica comprimentos por* $x = |x|$*;*
$x < 0$	*(+)Representa a transformação geométrica que desloca, um comprimento* $-x = |x|$*, ao longo do sentido contextual negativo (entenda decrescente, relativamente a* $\leq$*);* *(•)Representa a transformação geométrica que inverte o sentido contextual e multiplica comprimentos por* $-x = |x|$*;*
$x = 0$	*(+) Representa a transformação identidade* *(•)Representa a transformação geométrica constante, que anula comprimentos,* $OA \to O$

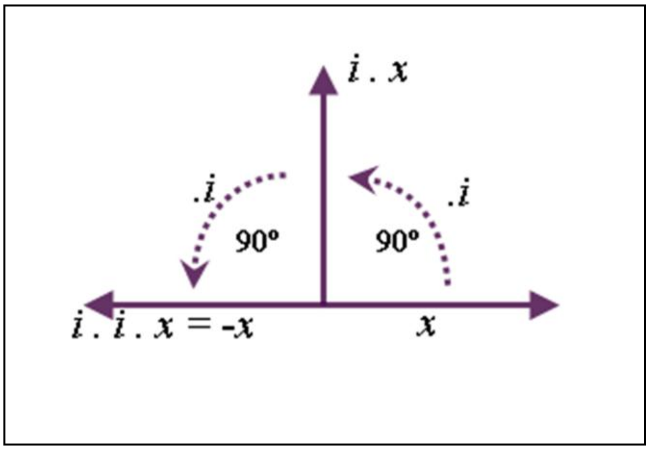
Como vimos acima, dado um número real $x \neq 0$, podemos compreender que $x^2 > 0$ da seguinte forma: o resultado final da transformação definida por $x^2 = x \bullet x$ nada mais é do que o resultado da *composição de duas transformações (homotetias) definidas por x*. Se *x*>0, estaremos mantendo o sentido contextual durante as duas transformações e estaremos multiplicando os comprimentos por *x*, duas vezes. Ou seja, o resultado final destas transformações será: *sentido contextual mantido e comprimentos multiplicados por* $x \bullet x = x^2$. No caso $x < 0$, obteremos o mesmo resultado, pois inverteremos o sentido duas vezes (portanto preservaremos o sentido inicial) e multiplicaremos os comprimentos por –*x*, duas vezes. O resultado final será, portanto, *sentido contextual mantido e comprimentos multiplicados por* $(-x)\bullet(-x) = x^2$. Em ambos os casos temos a manutenção do sentido contextual, o que fornece $x^2 > 0$. Quando o professor de João escreveu no quadro $i^2 = -1$, ele certamente não se referia a *i* como um número real. Afinal, se este fosse o caso, *i* teria de ser o representante de uma transformação geométrica que, se repetida por 2 vezes, forneceria o mesmo resultado da transformação representada por -1, que é aquela que inverte o sentido contextual e preserva comprimentos...mas isso é impossível na estrutura unidimensional de $\mathbb{R}$.

A Generalização

Para todo número $x \neq 0$ em $(\mathbb{R},+,\bullet)$, temos $x^2 > 0$, isto é, a composição de uma determinada transformação $x \neq 0$, consigo própria, sempre terá como resultado uma transformação que preserva o sentido contextual. Como vimos, este fato está bastante relacionado com a geometria “pouco espaçosa” da reta, que nos permite atuar apenas sobre os sentidos contextuais e sobre os comprimentos. Se conseguíssemos nos colocar em uma posição que nos permitisse *perceber direções* e incluir *outras transformações capazes de alterá-las*, talvez fosse possível estabelecer algum sentido para a expressão $i^2 = -1$, pelo menos intuitivamente.

A partir de agora, vamos supor que somos *observadores externos* da reta, mais precisamente: vamos supor que a reta $(\mathbb{R},+,\bullet)$ repousa sobre um determinado plano, por exemplo, e que a estamos observando de algum ponto deste plano, que não pertence a ela. No momento, não nos preocuparemos com as operações + e $\bullet$, nossa colocação será puramente geométrica. Repentinamente, ao nos tornarmos observadores externos da reta com um maior conhecimento espacial (conhecemos o plano), o conceito de *direção* começa a fazer sentido para nós, particularmente em $(\mathbb{R},+,\bullet)$. Com isso, o *sentido contextual* discutido anteriormente poderá ser naturalmente identificado ao tradicional *sentido vetorial*. Este espaço adicional que ganhamos, ao ampliarmos o nosso universo de percepção para um plano, será de fundamental importância em nossas considerações.

Poderíamos pensar em alguma transformação geométrica que, ao ser composta consigo própria, resultaria na transformação de homotetia definida por -1? Note que, *por estarmos em um plano, que é naturalmente mais espaçoso do que a reta*, uma rotação de 90º seria uma resposta para a pergunta que fizemos acima. Se efetuarmos, consecutivamente, duas rotações de 90º no sentido anti-horário, por exemplo, iremos obter a inversão do sentido e a manutenção de comprimentos. Ao chamarmos esta rotação de “T_i”, poderemos escrever $T_i \circ T_i = T_{-1}^{\bullet} \approx -1$.



Por estarmos ampliando o nosso universo de percepção geométrica para o plano, identificaremos seus elementos por meio das coordenadas cartesianas clássicas *(x,y)* e os da reta real $(\mathbb{R},+,\bullet)$ pelos pontos da forma *(x,0)*. As operações + e $\bullet$ estão definidas, neste momento, apenas sobre $(\mathbb{R},+,\bullet)$ (isto é, apenas sobre o eixo *x*!).

A releitura geométrica que propusemos para os números reais, particularmente aquela realizada por meio da operação de soma + (translações), propõe a mesma ideia (sobre a reta) que a soma usual de vetores no plano. De fato, assim como $x+y$ é a composição das translações deslocamentos promovidos por *x* e *y*, o vetor $\vec{u}+\vec{v}$ é o resultado da composição dos deslocamentos promovidos por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Portanto, se considerarmos a soma usual de vetores no plano, estaremos estendendo naturalmente a operação de soma real e servindo à concepção numérica proposta.

De forma sucinta, a colocação acima seria colocada da seguinte forma:

Definição: *Dados* $\vec{u}=(x_1,y_1)$ *e* $\vec{v}=(x_2,y_2)$ *, definiremos a operação de soma +, no plano, por* $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ *, onde as somas* x_1+x_2 *e* y_1+y_2 *são as somas usuais de* $(\mathbb{R},+,\bullet)$.

Ou seja ,dados $x\approx(x,0)$ e $y\approx(y,0)$ *reais, temos*

$x+y\ \approx\ (x,0)+(y,0)=(x+y,0)\approx\ (x+y)$ *, o que implica que a operação recém definida generaliza a operação de soma real.*

O grande desafio neste momento será *definir uma operação de produto no plano*, compatível com a abordagem geométrica feita em $(\mathbb{R},+,\bullet)$, *sobre o produto real*, por meio das homotetias. Para isso, estenderemos o universo de ação destas transformações ao plano, usando as denominações vetoriais usuais, da seguinte forma: *todo número real x define uma homotetia, do plano no plano, que atua sobre os seus elementos (vetores) alterando, eventualmente, o seu sentido (conforme seja o sinal de x) e o seu módulo (multiplicando-o por* $|x|$*), mas jamais a sua direção*. Estamos entendendo esta extensão como a permissão de utilização da operação de multiplicação de vetores por escalares reais, a partir deste momento.

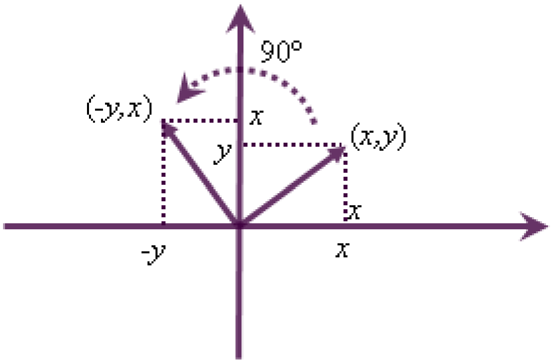
Por exemplo, perceberemos o número real 4 como o representante da transformação geométrica $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ T\left(\vec{v}\right)=4.\vec{v}$, isto é, $T(x,y)=(4x,4y)$. Podemos reescrever a transformação *T* matricialmente, como a seguir:

$$T(x,y)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x\\ 4y\end{pmatrix}\approx(4x,4y)=4.(x,y).$$

A representação acima sugere a identificação do número real 4 à homotetia de razão 4 *no plano* e, por conseguinte, à matriz $\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$. De um modo geral, identificaremos a homotetia definida pelo número $x\in\mathbb{R}$ à matriz $\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$. Neste sentido, a operação de produto real $\bullet$ é compatível *com a operação de produto matricial*, uma vez que

$$x\bullet y\approx\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\bullet y & 0\\ 0 & x\bullet y\end{pmatrix}\quad .$$

A rotação de 90º, no sentido anti-horário e em torno da origem, é a transformação linear que é definida pela matriz $m_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mais precisamente, $T_i(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \approx (-y, x)$.



Como havíamos antecipado,
$m_i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \approx$ -1 .

Ao efetuarmos o produto $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, obteremos $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx (0,1)$, uma vez que a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ promove uma rotação de 90º no sentido anti-horário sobre o vetor (1,0).

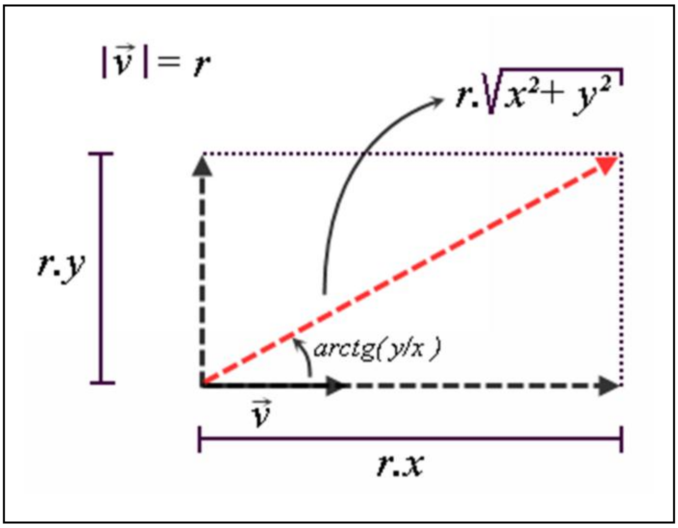
No plano, chamaremos de *i* o vetor (0,1) e iremos identificar a sua ação geométrica à rotação de 90º no sentido anti-horário, definida pela matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. É importante que não se confunda a representação do número complexo *i* no plano, (0,1), com a transformação geométrica que este é capaz de promover, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Em acordo com as identificações e notações adotadas, os pontos do plano podem ser representados por $(x, y) = x.(1,0) + y.(0,1) \approx x.1 + y.i \approx x + y.i$, onde o produto . entre *y* e *i* na expressão acima é o produto usual entre um escalar real e um vetor.

Se escrevermos a representação acima na forma matricial, estaremos identificando

$$(x, y) \approx x + y.i \approx \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

A transformação geométrica definida por uma matriz, que é o produto de duas outras matrizes, é igual à composição das transformações associadas a cada uma delas, individualmente. Assim, quando decompomos a transformação geométrica $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nas *transformações-componentes* $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, podemos perceber que ela é a resultante de duas homotetias de razão x e y, respectivamente, que atuam em direções ortogonais. Se analisarmos a figura abaixo, veremos que a transformação promovida pela matriz $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, será uma rotação, no sentido anti-horário de um ângulo correspondente a $arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, acompanhada de uma deformação de comprimentos por um fator igual a $\sqrt{x^2+y^2}$, o que, de agora em diante, chamaremos de *ampligiro*.



A figura acima mostra o ampligiro $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ atuando sobre um vetor $\vec{v} = (a, b)$. O vetor resultante, tracejado em vermelho, é o vetor transformado $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Toda a argumentação feita até aqui corrobora a participação visceral das operações algébricas definidas em $\mathbb{R}$ nos processos de deformação geométrica por meio de ampligiros. Há pouco, conseguimos estender a operação de soma ao plano, por meio da *realização de translações*. Mas como estender a operação de produto real ao plano?

A definição do produto $(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2)$ será alcançada por meio do produto matricial, capaz de compor os ampligiros $(x_1, y_1) \approx \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$ e $(x_2, y_2) \approx \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$. Se analisarmos geometricamente tal composição, veremos que ela será um novo ampligiro, cujo ângulo de rotação e cujo fator de deformação são, respectivamente, iguais à soma dos ângulos de rotação e ao produto dos fatores de deformação dos ampligiros componentes. A matriz associada ao ampligiro resultante é dada por

$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \bullet x_2 - y_1 \bullet y_2 & -(x_1 \bullet y_2 + x_2 \bullet y_1) \\ (x_1 \bullet y_2 + x_2 \bullet y_1) & x_1 \bullet x_2 - y_1 \bullet y_2 \end{pmatrix}$. O aspecto dos termos desta matriz sugere que o novo produto deve ser definido por $(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = (x_1 \bullet x_2 - y_1 \bullet y_2, x_1 \bullet y_2 + x_2 \bullet y_1)$. Tal escolha generalizaria, ao plano, a propriedade análoga do produto real na reta, que situa $x \bullet y$ como o resultado da composição das homotetias definidas por x e por y e justifica a proposta inicial acerca da "nova concepção numérica".

Finalmente, diante da nova concepção numérica estendível ao plano por ampligiros, torna-se coerente e interessante definirmos os números complexos da seguinte maneira:

Definição: *Chamaremos de conjunto dos números complexos* $\mathbb{C}$ *o conjunto* $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$, *onde + e* $\bullet$ *são as novas operações de soma e produto definidas no plano, chamadas, a partir de agora, de operações complexas. Continuaremos a representar estas operações pela mesma notação utilizada anteriormente, uma vez que os resultados das operações complexas realizadas entre elementos de* $\mathbb{R}$ *coincidem com aqueles obtidos por meio das operações reais.*

As transformações geométricas promovidas por números complexos são exatamente aquelas que relacionam polígonos semelhantes. Mais precisamente, dois polígonos são semelhantes se, e somente se, um puder ser obtido a partir do outro, por meio da composição de uma reflexão, uma homotetia, uma rotação e uma translação. Desta forma, poderíamos dizer que dois polígonos (geometricamente representados no plano complexo segundo uma mesma orientação) seriam semelhantes se, e somente se, algum fosse imagem do outro, por meio de alguma transformação $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ do tipo $T(z) = z_1 \bullet z + z_2$, para algum par de números complexos dado, z_1 e z_2. Não seria, portanto, um exagero considerarmos os números complexos como *as encarnações numéricas do conceito de semelhança*. Tal consideração, se bem aproveitada na escola de modo informal e distante do apego pelas *estruturas*, revelaria de forma honesta e transparente, aplicações de um conceito tão fundamental, como a descrição de movimentos bidimensionais e a criação de processos gráficos, que incluem as animações, os desenhos, etc. Este foi o aspecto originalmente abordado em (Mathias, 2008).

Por último, gostaria de fazer uma colocação que revela o centro da proposta humanista que aqui apresentei: toda definição é o lugar onde *encerramos um conceito (e a ele damos um nome) e não o lugar onde ele é construído.* Por isso, as definições deveriam estar presentes na parte final dos capítulos dos livros e textos matemáticos, pois lá poderiam coroar discussões anteriores, capazes de revelar as práticas e situações que as elegeram historicamente. Colocar definições no início de um texto matemático é o mesmo que mostrar as fotos 3x4 e os nomes dos personagens de uma história que nunca foi contada e acreditar que, desta forma, conseguiu-se apresenta-los de modo significativo. A essência da Matemática é alcançável mais por meio do conhecimento das práticas que legitimam as definições, do que por meio das próprias definições ou dos teoremas. As dificuldades vividas e as soluções elaboradas, que elegeram o conceito de proporção geométrica, por exemplo, são *mais essenciais* do que o Teorema de Tales. Os teoremas são apenas as maçãs de uma árvore mais bela. Quando um matemático escreve um texto didático, ele deve manter seu foco sobre a vida, sobre o clima, sobre a terra e sobre a árvore, mas jamais *apenas* sobre as maçãs.

Os saberes específico e pedagógico são fundamentais ao professor de matemática, no entanto, tais saberes deveriam ser acompanhados pela reflexão acerca da natureza da matemática e do papel do matemático: o *saber filosófico.*

Referências:

ASPRAY, W. ; KITCHER, P. *History and Philosophy of Modern Mathematics.* Minneapolis: Minnesota Press, 1988.

BENACERRAF, P. ; PUTNAM, H. *Philosophy of Mathematics: selected readings.* 2.ed. Melbourne: Cambridge University Press, 1983. p.403-420.

DEWEY, J. *Experience and Education*. New York: Touchstone, 1997.

ERNEST, P. *The Philosophy of Mathematics Education.* London: Falmer Press, 1991.

ERNEST, P. *Socialconstructivism as a Philosophy of Mathematics.* New York: State University of New York Press, 1998.

FEHR, H. *Reforma do Ensino da Geometria.* In: *Educacion Matemática em las Américas*. Teachers College: Columbia University , 1962.

HARDY, G. *A Mathematician´s Apology.* In: NEWMAN, J. (Ed.) *The World of Mathematics.* New York: Dover, 2000. (Volume 4) p. 2027-2038

HERSH, R. *What is Mathematics, Really?* New York: Oxford University Press, 1997.

LAKATOS, I. *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery.* New York: Cambridge University Press, 1976.

MATHIAS, C. *Novas Tecnologias no Ensino da Matemática: Repensando Práticas.* Rio de Janeiro: CECIERJ/CAPES/UAB/MEC, 2008.

WHITE, L. *The Locus of Mathematical Reality: An Anthropological Footnote.* In: NEWMAN, J. (Ed.) *The World of Mathematics.* New York: Dover, 2000. (Volume 4) p. 2348-2364

WITTGENSTEIN, L. *Philosophical Investigations.* Oxford: Basil Blackwell, 1953.

WITTGENSTEIN, L. *Remarks on the Foundations of Mathematics.* Cambridge: MIT Press, 1978.