Polinômios - Parte 04

Prof. Márcio Nascimento

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática Básica III - 2019.2
www.matematicauva.org
marcio@matematicauva.org

14 de janeiro de 2020

Revisão

Teorema do Resto

Seja $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio de grau $n \geq 1$ e c um número real arbitrário. Então existe um único polinômio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau $n - 1$ e tal que

$$f(x) = (x - c).q(x) + f(c)$$

Teorema de D'Alembert

Seja $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio e c um número real arbitrário. Então c é uma raiz de $f(x)$ se, e somente se, existe um polinômio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$f(x) = (x - c).q(x)$$

Teorema

Seja $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Se $c_1, c_2, ..., c_n$ são raízes distintas de f, então o polinômio $(x - c_1)(x - c_2)...(x - c_k)$ é um fator de $f(x)$, isto é, existe $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ (ou em $\mathbb{C}[x]$) tal que

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)...(x - c_k).g(x)$$

- **Prova:** Façamos indução sobre o número k de raízes distintas.

1. Para $k = 1$, temos o Teorema de D'Alembert.
2. Suponha o resultado válido para r raízes distintas.
3. Provemos que o resultado é válido para $r + 1$ raízes distintas.

Sejam $c_1, c_2, ..., c_{r+1}$ raízes distintas de $f(x)$.

- Pela hipótese de indução, existe $h(x)$ tal que

$$f(x) = \underbrace{(x - c_2).(x - c_3).\cdots.(x - c_{r+1})}_{r\ \ raizes\ \ distintas}.h(x)$$

Como $f(c_1) = 0$, segue que

$$(c_1 - c_2).(c_1 - c_3).\cdots.(c_1 - c_{r+1}).h(c_1) = 0$$

Mas sendo $c_1, c_2, ..., c_{r+1}$ distintos, só nos resta dizer que

$$h(c_1) = 0$$

Aplicando o Teorema de D'Alembert à $h(x)$, tem-se

$$h(x) = (x - c_1).g(x)$$

e portanto

$$f(x) = \underbrace{(x - c_2).(x - c_3).\cdots.(x - c_{r+1}).(x - c_1)}_{r+1\ \ raizes\ \ distintas}.g(x)$$

■

Raízes não distintas

Se $c_1, c_2, ..., c_k$ são raízes **não** distintas então não é verdade (em geral) que

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)...(x - c_k).g(x)$$

- Considere $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.
  Raízes de f: $c_1 = -2, c_2 = 1, c_3 = 1$.
- $f(x) = (x + 2)(x - 1).q(x)$, com $q(x) = x + 1$
  Porém, não existe $q_1(x)$ tal que $f(x) = (x - 1)(x - 1).q_1(x)$.
- Na verdade, $f(x) = (x - 1)(x - 1).(x + 4) + \underbrace{(6x - 6)}_{resto \neq 0}$

Teorema

Um polinômio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau n tem, no máximo, n raízes distintas (reais ou complexas).

- Prova: Suponha, por absurdo, que o polinômio $f(x)$ tem grau n e possui m raízes distintas, com $m > n$.

  Pelo teorema anterior,

  $$f(x) = \underbrace{(x - c_1).(x - c_2).\cdots.(x - c_n).\cdots.(x - c_m)}_{m \;\; raizes \;\; distintas}.q(x)$$

  Ora, mas sendo $q(x) \neq 0$, segue que

  $$f(x) = \underbrace{x^m.q(x)}_{grau \geq m} + \underbrace{h(x)}_{grau < m}$$

  o que contradiz a hipótese $\partial f = n$.

$\blacksquare$

Corolário

Se os polinômios f e g, ambos de grau n em $\mathbb{R}[x]$, coincidem em $n+1$ valores distintos, isto é, se

$$f(c) = g(c)$$

para n valores distintos de c, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Prova: Seja $h(x) = f(x) - g(x)$.
  De certo, $\partial h \leq n$.
- Se $f(c) = g(c)$ para $n+1$ valores de c, então $h(x)$ possui $n+1$ raízes.
- Ora, mas pelo teorema, não é possível que um polinômio de grau $\leq n$ tenha $n+1$ raízes. Então a única opção é que $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

■

Divisibilidade

Sejam $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Diremos que um polinômio $g(x)$ é divisível pelo polinômio $f(x)$ se

$$g(x) = f(x).h(x)$$

Neste caso diremos que $f(x)$ é um fator ou um divisor de $g(x)$.

Notação

$$f(x)|g(x)$$

Divisibilidade

Propriedades

Sejam os polinômios $f(x), g(x), h(x), k(x)$. São verdadeiras as seguintes sentenças:

- a Se $f(x)|g(x)$ e $g(x)|h(x)$, então $f(x)|h(x)$.
- b Se $f(x)|g(x)$ e $h(x)|k(x)$, então $f(x).h(x)|g(x).k(x)$.
- c Se $f(x)|g(x)$ e $g(x)|f(x)$, então $f(x) = a.g(x)$ para alguma constante $a \neq 0$.
- d Se $f(x)|g(x)$, então $\partial f \leq \partial g$.
- e Se $f(x)|g(x)$ e $f(x)|h(x)$, então $f(x)|[p(x).g(x) + q(x).h(x)]$ para polinômios arbitrários $p(x)$ e $q(x)$.

Polinômios Irredutíveis

Polinômios Irredutíveis

Um polinômio **não constante** $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ é dito **irredutível** se $f(x) = g(x).h(x)$ implica que $\partial g = 0$ ou $\partial h = 0$.

- **Exemplo:** $ax + b$, com $a \neq 0$, é um polinômio irredutível em $\mathbb{R}[x]$.

  $x^2 + 1$ é um polinômio irredutível em $\mathbb{R}[x]$.

  $x^2 + 1$ é redutível em $\mathbb{C}[x]$.

  $x - i$ é irredutível em $\mathbb{C}[x]$.
- Polinômios irredutíveis são os “números primos” de $K[x]$

Teorema

Seja $p(x)$ um polinômio irredutível. Se $f(x)|p(x)$ então ou $f(x)$ é uma constante não nula, ou $f(x)$ é um **polinômio associado** a $p(x)$, isto é, $f(x) = a.p(x)$ com $a \neq 0$.

- **Prova:** $f(x)|p(x) \Longrightarrow p(x) = h(x).f(x)$

  Mas se p é irredutível, então $\partial h = 0$ ou $\partial f = 0$.

  Se $\partial h = 0$, então $h(x) = a$ e $p(x) = a.f(x)$, ou seja, $f(x)$ é um polinômio associado à $p(x)$.

  Se $\partial f = 0$, então $f(x) = a$.

$\blacksquare$

Corolário

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios irredutíveis. Se $p(x)|q(x)$ então $p(x)$ e $q(x)$ são associados.

- **Prova:** $p(x)|q(x) \Longrightarrow q(x) = h(x).p(x)$.
- Sendo $q(x)$ irredutível, então $\partial h = 0$ ou $\partial p = 0$.
- Se $\partial h = 0$, então $h(x) = a$ e portanto $q(x) = a.p(x)$.
- Sendo p irredutível, não ocorre $\partial p = 0$.

$\blacksquare$

Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema Fundamental da Álgebra

Um polinômio não constante em $\mathbb{C}[x]$ sempre possui raízes complexas.

Corolário

Todo polinômio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ com $\partial p \geq 2$ tem um fator linear (grau 1) em $\mathbb{C}[x]$.

Corolário

Os únicos polinômios irredutíveis em $\mathbb{C}[x]$ são os lineares.

Corolário

Todo polinômio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ com $\partial p \geq 1$ é um produto de n fatores lineares em $\mathbb{C}[x]$.

Teorema

Seja $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Se $c + di$ é uma raiz imaginária de f então $c - di$ também é uma raiz imaginária de f.

Corolário

Se $c + di$ e $c - di$ são raízes imaginárias de $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, então $x^2 - 2cx + (c^2 + d^2)$ é irredutível em $\mathbb{R}[x]$.

Corolário

Os polinômios irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$ são os lineares e os quadráticos com discriminante negativo.

- **Prova:** Como as raízes imaginárias aparecem em pares (conjugados), então basta observar que $\partial p = 2k + r$ onde $r = 0$ ou $r = 1$.
  Isto é, cada par de raízes complexas produz um polinômio irredutível de grau 2 em $\mathbb{R}[x]$.

$\blacksquare$

Exercícios da lista

Bônus (2 pontos): vídeos com resolução de 1 dos exercícios da lista.
Exercícios indicados: 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 39, 41, 44.
Data limite: 21/01/2020, 12h (meio-dia)