3ª Avaliação Parcial - 2019.2 - Álgebra Matricial - ♣

Estudante:

IMPORTANTE:
1. A resolução da prova deve ser feita de maneira **individual**.
2. Término da aplicação da prova: 21h20;
3. Permitido uso de calculadora, mas não o uso de smartphone;
4. Resoluções à lápis e/ou rasuradas não poderão ser contestadas depois de divulgada a nota;
5. Além da folha com as questões, você recebeu mais 3 folhas. Coloque seu nome em todas e devolva tudo ao entregar a prova. **Não desagrupar as folhas.**

1. (1,5) Diga se verdadeiro ou falso, **justificando** cada resposta:

   (a) O posto de uma matriz corresponde à quantidade de linhas não nulas após o escalonamento.

   (b) Um sistema tem 3 equações e 3 variáives. Se o sistema é impossível, então existe linha nula após o escalonamento da matriz ampliada.

   (c) Um sistema tem infinitas soluções. Então na forma escalonada reduzida de sua matriz aumentada, existe pivot na coluna dos termos independentes.

2. (4,0) Usando o **método de Gauss-Jordan**, resolva os sistemas a seguir:

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

3. (0,5) Determine a solução do sistema homogêneo associado ao sistema do item (b) da questão anterior.

4. Dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) (2,0) Determine a inversa de A usando o método de Gauss-Jordan.

   (b) (2,0) Calcule o determinante de A usando eliminação gaussiana.

(1) (a) VERDADEIRO. O posto corresponde à quantidades de pivots. Só não terá pivot uma linha que for completamente nula

(b) FALSO. Por exemplo, considere um sistema cuja forma escalonada é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Este sistema é impossível mas não possui linha nula a sua forma escalonada

(c) FALSO. Se existe pivot na coluna dos termos independentes então o sistema não possui solução.

(2) (a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow 2L_2+L_1 \\ \leftarrow 2L_3-L_1 \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 3L_1+L_2 \\ \\ \leftarrow 3L_3+L_2 \\ \leftarrow 3L_4-L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 8L_1+L_3 \\ \leftarrow 8L_2+L_3 \\ \\ \leftarrow 8L_4-L_3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 48 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 24 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 16 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \\ \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ \leftarrow \frac{1}{6}L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 5L_1+L_4 \\ \leftarrow 5L_2+L_4 \\ \leftarrow 5L_3+3L_4 \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 40 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 40 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \frac{1}{40}L_1 \\ \leftarrow \frac{1}{20}L_2 \\ \leftarrow \frac{1}{40}L_3 \\ \leftarrow \frac{1}{5}L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right]$$

SOLUÇÃO DO SISTEMA: $\left(1/10 \,,\, 1/5 \,,\, 3/10 \,,\, -1/5\right)$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2-2L_1 \\ \leftarrow L_3-3L_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 & -4 & 3 & -7 \end{array}\right]\begin{array}{l} \leftarrow 3L_1+2L_2 \\ \\ \leftarrow 3L_3-4L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & -8 & -3 & -9 \end{array}\right]\begin{array}{l} \leftarrow 4L_1+L_3 \\ \leftarrow 4L_2-L_3 \\ \\ \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 12 & 0 & 0 & -4 & 9 & -9 \\ 0 & -12 & 0 & 4 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & -8 & -3 & -9 \end{array}\right]\begin{array}{l} \leftarrow \frac{1}{12}L_1 \\ \leftarrow \frac{1}{-12}L_2 \\ \leftarrow \frac{1}{-12}L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 3/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -5/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/4 & 3/4 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} & & & \uparrow & \uparrow \\ & & & \alpha & \beta \end{array} \end{array}\begin{array}{l} \rightarrow x = -3/4 + \alpha/3 - 3\beta/4 \\ \rightarrow y = 1/4 + \alpha/3 + 5\beta/4 \\ \rightarrow z = 3/4 - 2\alpha/3 - \beta/4 \\ \\ \end{array}$$

$$x_4 = \alpha \,,\; x_5 = \beta$$

Solução Geral: $\left(-\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{3} - \frac{3\beta}{4} \,;\, \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{3} + \frac{5\beta}{4} \,;\, \frac{3}{4} - \frac{2\alpha}{3} - \frac{\beta}{4} \,;\, \alpha \,;\, \beta\right)$

(3) Solução do Sistema Homogêneo Associado:

$$\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{3\beta}{4} \,,\, \frac{\alpha}{3} + \frac{5\beta}{4} \,,\, \frac{-2\alpha}{3} - \frac{\beta}{4} \,,\, \alpha \,,\, \beta\right)$$

④

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 5 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 6 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow -L_3 \\ \leftarrow L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 5 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 6 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_3 - 4L_2 \\ \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 17 & 1 & -15 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & 0 & -13 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 6L_1 + L_3 \\ \leftarrow 6L_2 + L_3 \\ \\ \leftarrow 6L_4 - 5L_3 \end{array}$$

$$
\begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
6 & 0 & 0 & 11 & 1 & -9 & 4 & 0 \\
0 & 6 & 0 & -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -6 & 17 & 1 & -15 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5 & -5 & -3 & -2 & 6
\end{array}\right] &
\begin{array}{l}
\leftarrow 5L_1 - 11L_4 \\
\leftarrow 5L_2 + L_4 \\
\leftarrow 5L_3 - 17L_4 \\

\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
30 & 0 & 0 & 0 & 60 & -12 & 42 & -66 \\
0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 12 & -12 & 6 \\
0 & 0 & -30 & 0 & 90 & -24 & 54 & -102 \\
0 & 0 & 0 & 5 & -5 & -3 & -2 & 6
\end{array}\right] &
\begin{array}{l}
\leftarrow L_1/30 \\
\leftarrow L_2/30 \\
\leftarrow L_3/-30 \\
\leftarrow L_4/5
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2/5 & 7/5 & -11/5 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & -2/5 & 1/5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 4/5 & -9/5 & 17/5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3/5 & -2/5 & 6/5
\end{array}\right]
$$

↳ MATRIZ INVERSA DE A

(b) $A = \begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
3 & 4 & 1 & 2 \\
1 & 0 & 1 & -1 \\
3 & -1 & 2 & 0 \\
4 & 3 & 2 & 2
\end{bmatrix} &
\begin{array}{l}
\leftarrow L_2 \\
\leftarrow L_1 \\
 \\

\end{array}
\end{array}$

1. PERMUTA DE LINHAS: (-1)

$$
\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & -1 \\
3 & 4 & 1 & 2 \\
3 & -1 & 2 & 0 \\
4 & 3 & 2 & 2
\end{bmatrix} &
\begin{array}{l}
 \\
\leftarrow L_2 - 3L_1 \\
\leftarrow L_3 - 3L_1 \\
\leftarrow L_4 - 4L_1
\end{array}
\end{array}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 4L_3+L_2 \\ \leftarrow 4L_4-3L_2 \end{array} \qquad (4).(4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 17 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow 3L_4-L_3 \end{array} \qquad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = T$$

$$\det A = \frac{\det T}{(-1)(4)(4).(3)} = \frac{1.\cancel{4}.\cancel{(-6)}^{\,2}.10}{\cancel{(-1)}.\cancel{4}.\cancel{4}.\underset{2}{\cancel{3}}} = \frac{10}{2} = 5$$