ÁLGEBRA MATRICIAL - 2019.2 - 3ª AP - 23/01/2020

Estudante: CORREÇÃO

IMPORTANTE:

- Término da prova: 21h20min;
- Permitido uso de calculadora, mas não o uso de smartphone;
- Resoluções à lápis e/ou rasuradas não poderão ser contestadas depois de divulgada a nota;
- Além da folha com as questões, você recebeu mais 3 folhas. **Não destaque as folhas,** coloque seu nome em todas e devolva tudo ao entregar a prova.

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

---

1. (2,0) Usando **eliminação gaussiana**, calcule o determinante de A.

2. (2,0) Seja $AX = B$ a equação de um sistema linear com quatro incógnitas. **Sem resolver o sistema**, explique quantas soluções ele possui.

3. (a) (1,0) Quais os determinantes de A^{-1} e de $-A$? Apresente os cálculos/justificativa!

   (b) (1,0) Quais os determinantes de A^{-3} e $-8A$? Apresente os cálculos/justificativa!

4. (2,0) Calcule $\dfrac{\det(A^2) - 5\det(A.A^T)}{3 + \det(A^3)}$

5. (2,0) Seja M uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ cujo determinante é igual a α. Mostre que $det(M^n) = \alpha^n$.

(01) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_4 \\ \\ \\ \leftarrow L_1 \end{matrix}$ (-1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 4L_3 + 3L_2 \\ \leftarrow 2L_4 - L_2 \end{matrix}$ $(4).(2)$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow -\frac{1}{5} L_4 \end{matrix}$ $\left(-\frac{1}{5}\right)$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow 7L_4 - L_3 \end{matrix}$ (7) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = T$

$$\det A = \frac{\det T}{(-1).(4).(2).\left(-\frac{1}{5}\right)(7)} = \frac{1.\cancel{4}.\cancel{7}.2}{(-1).\cancel{(4)}(2).\left(-\frac{1}{5}\right)\cancel{(7)}} = \frac{1}{\frac{1}{5}}$$

$$= 1 \times \frac{5}{1} = 5$$

(02) $AX = B$

COMO VIMOS NA QUESTÃO 1, $\det A = 5 \neq 0$. LOGO, EXISTE A INVERSA A^{-1} E PORTANTO $X = A^{-1}.B$.

COMO A INVERSA É ÚNICA, SEGUE-SE QUE O PRODUTO $A^{-1}.B$ TAMBÉM É ÚNICO.

PORTANTO, X É A <u>ÚNICA</u> SOLUÇÃO DO SISTEMA. ■

(03) (A) $A.A^{-1} = I \Rightarrow \det(A.A^{-1}) = \det I$

$$\overset{(\text{BINET})}{\Longrightarrow} \det A . \det A^{-1} = 1$$

$$\Longrightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

COMO VIMOS NA QUESTÃO 1, DET $A = 5$. LOGO, $\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{5}}$

$-A = (-1).A$, ISTO É, ESTAMOS MULTIPLICANDO CADA LINHA DE A PELA CONSTANTE $\alpha = -1$. DAÍ, COMO A TEM 4 LINHAS:

$$\det(-A) = (-1)^4 . \det A = 1.5 = 5$$

PORTANTO, $\boxed{\det(-A) = 5}$

(03 b) $A^{-3} = (A.A.A)^{-1}$

Pelo item (a), $\det(A.A.A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(A.A.A)}$

Pelo Teorema de Binet,

$$\det(A.A.A) = \det A . \det A . \det A$$

Logo,

$$\det(A^{-3}) = \frac{1}{5.5.5} = \frac{1}{125}$$

$$\det(-8A) = (-8)^4 . \det A = 4096.5 = \underline{20\,480}$$

(04)

$$\frac{\det(A^2) - 5.\det(A.A^T)}{3 + \det(A^3)} = \frac{\det(A.A) - 5.\det(A.A^T)}{3 + \det(A.A.A)}$$

Usando o Teorema de Binet:

$$= \frac{\det A . \det A - 5.\det A . \det(A^T)}{3 + \det A . \det A . \det A}$$

Sabendo que $\det(A^T) = \det A$

$$= \frac{(\det A)^2 - 5.\det A . \det A}{3 + (\det A)^3}$$

$$= \frac{(\det A)^2 - 5.(\det A)^2}{3 + (\det A)^3}$$

$$= \frac{5^2 - 5.5^2}{3 + 5^3} = \frac{25 - 125}{3 + 125} = \frac{-100}{128}$$

$$= -\frac{25}{32}$$

5

$$\det M = \alpha$$

$$\det(M^n) = \det(\underbrace{M \cdot M \cdots M}_{n\text{-vezes}})$$

TEOREMA DE BINET

$$= \underbrace{\det M \cdot \det M \cdots \det M}_{n\text{-vezes}}$$

$$= \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n\text{-vezes}} = \alpha^n$$