Lista de Exercícios 07 - Álgebra Matricial - 2019.2

Vídeos 13 e 14 (videocurso 2013)

1. Use a **definição**, isto é, o conceito de **permutações**, para chegar ao determinante (calculando ou argumentando) de cada matriz a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \theta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Seja d o determinante da matriz $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$

   (a) Qual o determinante de $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k.a_{31} & k.a_{32} & k.a_{33} \end{bmatrix}$

   (b) Qual o determinante de $C = \begin{bmatrix} t.a_{11} & t.a_{12} & t.a_{13} \\ u.a_{21} & u.a_{22} & u.a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

   (c) Qual o determinante de $\alpha.A$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$?

   (d) Qual o determinante de $-A$?

3. (a) Seja $A_{3\times 3}$ com $det(A) = d$. Qual o determinante de $-A$?

   (b) Seja $A_{4\times 4}$ com $det(A) = d$. Qual o determinante de $-A$?

   (c) Seja $A_{n\times n}$ com $det(A) = d$. Qual o determinante de $-A$?

4. Use eliminação gaussiana para reduzir a matriz dada a uma matriz triangular superior e depois calcule o determinante da matriz original.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{bmatrix}$$

5. Calcule o valor de α para que a matriz seja não singular.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Seja A uma matriz quadrada de ordem $9x9$. Foram feitas as seguintes manipulações em A:

   ♠ Troca das linhas 2 e 7; Troca das linhas 3 e 5.

   ♣ Em seguida, soma das linhas 4 e 5 para substituir a linha 5.

   ★ Multiplicação das linhas pares por 3 e das linhas ímpares por -2.

   O determinate da matriz final é 10368. Qual o determinante de A?

7. Uma matriz quadrada A de ordem $n \times n$ tem uma forma escalonada reduzida na qual aparecem linhas nulas.
   (a) Que se pode dizer sobre o $posto(A)$?
   (b) Que se pode dizer sobre A^{-1}?
   (c) Qual o determinante de A?
   (d) Como você relacionaria posto, inversa e determinante de uma matriz quadrada $A_{n \times n}$?

8. Use determinante para encontrar o(s) valor(es) de α para o(s) qual(ais) o seguinte sistema tem única solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

9. Seja A uma matriz de ordem 3×3.
   (a) Mostre que se A possuir 2 colunas iguais, então $\det(A) = 0$.
   (b) Mostre que se A possuir 2 linhas iguais, então $\det(A) = 0$.
   (c) Generalize os itens acima para matrizes de ordem $n \times n$.

Gabarito

(1) $det(A) = 145$, $det(B) = \alpha.\beta.\gamma$, $det(C) = \alpha.\beta.\gamma$, $det(D) = 0$, $det(E) = 0$, $det(F) = \alpha.\beta.\gamma.\theta$, $det(G) = \alpha.\beta.\gamma.\theta$

(4) $det(A) = 10, det(B) = 0, det(C) = 39, det(D) = 1, det(E) = (n-1)!$

(5) Na matriz A: $\alpha \in \mathbb{R} - \{5/3\}$. Na matriz B: $\alpha \in \mathbb{R} - \{21/2\}$

(6) -4.

(8) $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$