2ª Avaliação Parcial - 2019.2 - Álgebra Matricial

Estudante:

IMPORTANTE:
1. A resolução da prova deve ser feita de maneira **individual**.
2. Término da aplicação da prova: 21h20;
3. Permitido uso de calculadora, mas não o uso de smartphone;
4. Resoluções à lápis e/ou rasuradas não poderão ser contestadas depois de divulgada a nota;
5. Além da folha com as questões, você recebeu mais 3 folhas. Coloque seu nome em todas e devolva tudo ao entregar a prova. **Não desagrupar as folhas.**

1. **(2,0)** Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine $C = [c_{ij}]_{3\times2}$ de modo que

$$2A + 3B - 2C^T = U_{2\times3}$$

onde U é uma matriz cujos elementos são todos iguais a 1.

2. **(2,0)** (UVA-2020.1 - adaptada) Uma empresa fabrica camisas, calções meias. Os itens produzidos são vendidos em suas próprias lojas, localizadas em diferentes estados do Brasil. A tabela ao lado mostra os valores (em Reais) praticados em cada estabelecimento.

	Camisa	Calção	Meia
Loja 1	25,00	15,00	12,00
Loja 2	28,00	20,00	15,00
Loja 3	30,00	22,00	15,00
Loja 4	32,00	25,00	17,50

A empresa realizará um dia de descontos diferenciados, com 10% no valor da camisa, 15% no valor do calção e 20% no valor da meia. O funcionário que cuida das finanças da empresa usará produto de matrizes para obter os valores de venda que serão praticados neste dia. Considerando que ele simplesmente transforma o quadro acima em uma matriz A de ordem 4×3, determine o quadro que representa a matriz B tal que o produto $A.B$ represente o quadro com os valores atualizados (com desconto).

3. Sejam $L1, L2, ..., L9$ os números correspondentes as nove primeiras de seu nome, começando pelo zero (A=0, B=1, C=2,..., Z=25). Por exemplo, se seu nome fosse JOSÉ FAUSTINO, os números correspondentes às 9 primeiras letras seriam: 9, 14, 18, 4, 5, 0, 20, 18, 19.

$$K = \begin{bmatrix} L1 & L2 & L3 \\ L4 & L5 & L6 \\ L7 & L8 & L9 \end{bmatrix}$$

Preencha a matriz K acima e:

(a) **(3,0)** Calcule a inversa de K.

(b) **(2,0)** Resolva o sistema $K.X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando as propriedades da multiplicação de matrizes.

(c) **(1,0)** Resolva o sistema homogêneo associado ao sistema do item (b).

Questões Retrô

4. **(2,0)** Resolva o item (b) da questão 3 usando o método de Gauss-Jordan.

5. **(2,0)** Usando Gauss-Jordan, resolva o sistema $A^T.X = B$ onde A é a matriz A da questão 1 e $B^T = [1150 \quad 820 \quad 595]$.

(1) $2A + 3B - 2C^T = U$

$$\Leftrightarrow \quad 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -8 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 3 & 12 \\ -15 & -6 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 11 & 9 & 16 \\ -23 & -8 & 7 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -2\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 9 & 16 \\ -23 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -2\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -8 & -15 \\ 24 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -10 & -8 & -15 \\ 24 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 15/2 \\ -12 & -9/2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -12 \\ 4 & -9/2 \\ 15/2 & 3 \end{bmatrix}$$

OUTRA VERSÃO

(1) $2A+3B-2C^T=U$

$$\Leftrightarrow -2C^T = U-2A-3B$$

$$\Leftrightarrow C^T = -\frac{1}{2}\left[U-2A-3B\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&3&2\\-4&-1&2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}3&1&4\\-5&-2&1\end{bmatrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(1-2-9)&(1-6-3)&(1-4-12)\\(1+8+15)&(1+2+6)&(1-4-3)\end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-10&-8&-15\\24&9&-6\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5&4&15/2\\-12&-9/2&3\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow C = \begin{bmatrix}5&-12\\4&-9/2\\15/2&3\end{bmatrix}$$

∎

(2)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 25 & 15 & 12 \\ 28 & 20 & 15 \\ 30 & 22 & 15 \\ 32 & 25 & 17,5 \end{bmatrix}}_{A_{4\times3}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}}_{B_{3\times3}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 22,50 & 12,75 & 9,60 \\ 25,20 & 17 & 12 \\ 27 & 18,70 & 12 \\ 28,80 & 21,25 & 14 \end{bmatrix}}_{D_{4\times3}}$$

OBSERVE QUE O PRODUTO INTERNO $A_{1*} \cdot B_{*1} = 22,50$, OU SEJA, REPRESENTA SOMENTE 90% DO VALOR DA CAMISA NA LOJA 1. ANALOGAMENTE:

$25,20 = A_{2*} \cdot B_{*1} \longrightarrow$ 90% DO VALOR DA CAMISA NA LOJA 2

$27,00 = A_{3*} \cdot B_{*1} \longrightarrow$ 90% DO VALOR DA CAMISA NA LOJA 3

$28,80 = A_{4*} \cdot B_{*1} \longrightarrow$ 90% DO VALOR DA CAMISA NA LOJA 4

DESTA FORMA, A PRIMEIRA COLUNA DE B REPRESENTA O DESCONTO NAS CAMISAS (PRIMEIRA COLUNA) DE A E NÃO AGE NAS DEMAIS COLUNAS DE A.

Daí, $B_{*1} = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

COM ESTE MESMO RACIOCÍNIO CONCLUÍMOS QUE $B_{*2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,85 \\ 0 \end{bmatrix}$ E $B_{*3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8 \end{bmatrix}$

Assim, $B = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0,85 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}$

OU

0,9	0	0
0	0,85	0
0	0	0,8

③ MARCIONAS

$$\begin{array}{ccccccccc} M & A & R & C & I & O & N & A & S \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 12 & 0 & 17 & 2 & 8 & 14 & 13 & 0 & 18 \end{array}$$

(a) $$K = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 17 \\ 2 & 8 & 14 \\ 13 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 17 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 0 & 18 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2/2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 17 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 18 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - 12L_1 \\ \leftarrow L_3 - 13L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -48 & -67 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & -52 & -73 & 0 & -13 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 12L_1 + L_2 \\ \\ \leftarrow 12L_3 - 13L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 17 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & -67 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -13 & 0 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 5L_1 + 17L_3 \\ \leftarrow 5L_2 - 67L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 60 & 0 & 0 & -216 & 0 & 204 \\ 0 & -240 & 0 & 876 & -60 & -804 \\ 0 & 0 & -5 & -13 & 0 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1/60 \\ \leftarrow L_2/-240 \\ \leftarrow L_3/-5 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -18/5 & 0 & 17/5 \\ 0 & 1 & 0 & -73/20 & 1/4 & 67/20 \\ 0 & 0 & 1 & 13/5 & 0 & 12/5 \end{array}\right]$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} -18/5 & 0 & 17/5 \\ -73/20 & 1/4 & 67/20 \\ 13/5 & 0 & 12/5 \end{bmatrix}}_{K^{-1}}$$

(b) $$K.X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = K^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -18/5 & 0 & 17/5 \\ -73/20 & 1/4 & 67/20 \\ 13/5 & 0 & 12/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18/5 + 0 + 17/5 \\ 73/20 + 0 + 67/20 \\ -13/5 + 0 + 12/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

(c) No item (b) vimos que $K.X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ tem única solução.

Então $K.X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ terá apenas a solução trivial: $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

■

Questões Retrô

(4) $K.X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & 17 & 0 \\ 2 & 8 & 14 & 0 \\ 13 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right]$

→ Basta aplicar o método de Gauss-Jordan!

(5) $A^T X = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1150 \\ 820 \\ 595 \end{bmatrix}$

Matriz Ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 1150 \\ 3 & -1 & 820 \\ 2 & 2 & 595 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 1150 \\ 0 & 11 & -2630 \\ 0 & 10 & -1705 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 11L_1 + 4L_2 \\ \\ \leftarrow 11L_3 - 10L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 11 & 0 & 2130 \\ 0 & 11 & -2630 \\ 0 & 0 & 7545 \end{array}\right]$$

$0 = 7545$

Sistema impossível!