Polinômios - Parte 03

Prof. Márcio Nascimento

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática Básica III - 2019.2
www.matematicauva.org
marcio@matematicauva.org

26 de novembro de 2019

Sumário

Sumário

Método de Briot-Ruffini

Quando se deseja dividir polinômios por binômios de grau 1, pode-se usar um dispositivo prático: o método de Briot-Ruffini[1] (ou Regra de Ruffini).

[1] Método desenvolvido no início do século XIX por Charles August Briot (francês) e Paolo Ruffini (italiano).

Exemplo

Vamos dividir $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ por $d(x) = x - 2$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 3 & -4 & 2 & 1 \\
\hline
2 & & & & \\
\hline
 & \multicolumn{3}{c|}{\text{coeficientes de q(x)}} & r(x)
\end{array}
$$

- Coeficientes do $p(x)$ na primeira linha.
- Observe onde ficou o termo independente de $p(x)$.
- Na segunda linha, mais à esquerda, a raíz de $d(x)$.

Dividir $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ por $d(x) = x - 2$

Inicialmente, baixamos o primeiro coeficiente para a terceira linha

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & \downarrow & & & \\ \hline & 3 & & & r(x) \end{array}$$

Agora fazemos o produto deste coeficiente pela raíz de $d(x)$, isto é, fazemos

$$3.2 = 6$$

e o resultado vai para a linha intermediária do esquema:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & \downarrow & 6 & & \\ \hline & 3 & & & r(x) \end{array}$$

Dividir $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ por $d(x) = x - 2$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 3 & -4 & 2 & 1 \\
\hline
2 & \downarrow & 6 & & \\
\hline
 & 3 & & & r(x)
\end{array}
$$

Para obter o segundo coeficiente de $q(x)$, somamos os elementos acima, na mesma coluna:

$$-4 + 6 = 2$$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 3 & -4 & 2 & 1 \\
\hline
2 & \downarrow & 6 & & \\
\hline
 & 3 & 2 & & r(x)
\end{array}
$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 3 & -4 & 2 & 1 \\ \hline
2 & \downarrow & 6 & & \\ \hline
 & 3 & 2 & & r(x)
\end{array}$$

Este novo coefiente será multiplicado novamente pela raiz de $d(x)$ e levado a segunda linha do esquema:

$$2.2 = 4$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 3 & -4 & 2 & 1 \\ \hline
2 & \downarrow & 6 & 4 & \\ \hline
 & 3 & 2 & & r(x)
\end{array}$$

	3	-4	2	1
2	$\downarrow$	6	4	
	3	2		$r(x)$

Para obter o último coeficiente de $q(x)$, novamente somamos os elementos desta coluna:

	3	-4	2	1
2	$\downarrow$	6	4	
	3	2	6	$r(x)$

Mais uma vez, fazemos o produto do coeficiente encontrado pela raiz de $d(x)$ e o resultado vai para a linha intermediária; desta vez, para a última coluna:

	3	-4	2	1
2	$\downarrow$	6	4	12
	3	2	6	$r(x)$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & \downarrow & 6 & 4 & 12 \\ \hline & 3 & 2 & 6 & r(x) \end{array}$$

Somando-se os elementos na última coluna, encontramos o resto da divisão:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & \downarrow & 6 & 4 & 12 \\ \hline & 3 & 2 & 6 & 13 \end{array}$$

Desta forma,

$$\begin{array}{c|c} 3x^3 - 4x^2 + 2x + 1 & x - 2 \\ \cline{2-2} (13) & 3x^2 + 2x + 6 \end{array}$$

Exercícios

Realize a divisão de $p(x)$ por $d(x)$ usando o método de Briot-Rufini em cada item a seguir:

- $p(x) = 4x^5 + 3x^2 - 1$ e $d(x) = x - 2$

R: $q(x) = 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 35x + 70$ e $r(x) = 139$

- $p(x) = -3x^4 + x^2 - 2x$ e $d(x) = x + 7$

R: $q(x) = -3x^3 + 21x^2 - 146x + 1020$ e $r(x) = -7140$

- $p(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$ e $d(x) = 2x + 1$

R: $q(x) = -\dfrac{4x^2 - 6x + 7}{8}$ e $r(x) = \dfrac{15}{8}$

Observação

No método de Briot-Ruffini, quando o coeficiente líder do divisor for diferente de 1, então

$$
\begin{aligned}
p(x) &= q(x).(ax+b)+r(x) \\
&= q(x).\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]+r(x) \\
&= [a.q(x)].\left(x+\frac{b}{a}\right)+r(x) \\
&= [\widehat{q}(x)].\left(x+\frac{b}{a}\right)+r(x)
\end{aligned}
$$

Portanto, ao final do processo, devemos **dividir** por a os coeficientes (supostamente) encontrados para q.

Sumário

Método da Chave

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \;\big|\; \underline{x + 1}$$

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^3 + 2x^2 + 3x + 1 & x + 1 \\ \cline{3-3}
- & x^3 + x^2 + 0.x + 0 & x^2 + x + 2 \\ \cline{2-2}
 & x^2 + 3x + 1 & \\
- & x^2 + x + 0 & \\ \cline{2-2}
 & 2x + 1 & \\
- & 2x + 2 & \\ \cline{2-2}
 & -1 &
\end{array}$$

Sumário

Teorema do Resto

Teorema do Resto

Seja $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio de grau $n \geq 1$ e c um número real arbitrário. Então existe um único polinômio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau $n-1$ e tal que

$$f(x) = (x-c).q(x) + f(c)$$

Exemplo: Considere $f(x) = x^2 + 2x + 3$ e $c = 1$. Então existe um único $q(x) = ax + b$ tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1).q(x) + f(1) \\ x^2 + 2x + 3 &= (x-1)(ax+b) + 6 \\ x^2 + 2x + 3 &= ax^2 + (b-a)x + (6-b) \end{aligned}$$

q(x)=x+3

- Em outras palavras: o resto da divisão de $f(x)$ por $(x-c)$ é igual a $f(c)$.

Demonstração do Teorema do Resto

Vamos usar indução sobre o grau n de $f(x)$.

- Para $n = \partial f = 1$, temos $f(x) = a_1 x + a_0$ com $a_1 \neq 0$ e podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x) = a_1 x + a_0 &= a_1 x - a_1.c + a_1.c + a_0 \\ &= (x-c)a_1 + (a_1 c + a_0) \\ &= (x-c)a_1 + f(c) \end{aligned}$$

  Portanto, tomando $q(x) = a_1$, temos $f(x) = (x-c).q(x) + f(c)$.

- Suponha que o resultado é válido para todo polinômio $f(x)$ com $\partial f = k$. Provemos que isso implica na validade do resultado para $\partial f = k+1$.

Demonstração do Teorema do Resto

Seja

$$f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$$

um polinômio de grau $k+1$ e seja c um número real.

- Considere o polinômio $h(x) = (x-c).a_{k+1}x^k$.
- Veja que $\partial f = \partial h$.
- Além disso, se $g(x) = f(x) - h(x)$, então $\partial g = k$.
- Também é verdade que $g(c) = f(c)$.
  Isso significa que para $g(x)$, podemos considerar a validade do teorema do resto, ou seja, existe $u(x)$ de grau $k-1$ tal que

$$\begin{aligned}
g(x) &= (x-c).u(x) + g(c) \\
f(x) - h(x) &= (x-c).u(x) + g(c) \\
f(x) - (x-c).a_{k+1}x^k &= (x-c).u(x) + f(c) \\
f(x) &= (x-c).a_{k+1}x^k + (x-c).u(x) + f(c) \\
f(x) &= (x-c).\underbrace{[a_{k+1}x^k + u(x)]}_{q(x),\quad \partial q = k} + f(c)
\end{aligned}$$

Teorema de D'Alembert

Teorema de D'Alembert

Seja $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio e c um número real arbitrário. Então c é uma raiz de $f(x)$ se, e somente se, existe um polinômio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$f(x) = (x - c).q(x)$$

Prova: Decorre diretamente do Teorema do Resto.

$\blacksquare$

Exemplo

Encontrar as raízes de $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$.

- Por inspeção, $f(1) = 0$. Portanto, pelo Teorema de D'Alembert, existe $q(x)$ (de grau 3) tal que $f(x) = (x-1).q(x)$.
- Dividindo $x^4 + x^3 - x - 1$ por $x - 1$, obtemos $q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.
- Também por inspeção, $q(-1) = 0$. Aplicando novamente o Teorema de D'Alembert, existe $q_1(x)$ (de grau 2) tal que $q(x) = (x+1).q_1(x)$.
- Dividindo $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ por $x + 1$, obtemos $q_1(x) = x^2 + x + 1$.
- Portanto, $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 1)$, sendo que o discriminante de $h(x) = x^2 + x + 1$ é negativo (sem raízes reais).
- Raízes complexas de h: $w = \dfrac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$.