Polinômios - Parte 2

Prof. Márcio Nascimento

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática Básica III - 2019.2
www.matematicauva.org
marcio@matematicauva.org

19 de novembro de 2019

Sumário

Sumário

Multiplicação

Assim como na adição, a *multiplicação* de polinômios consiste basicamente no uso das propriedades das operações com números reais (ou complexos).

Exemplo:

$$\begin{aligned}
p(x).q(x) &= (2x^2 + x + 1)(x^2 - 2x) \\
&= 2x^2.x^2 + 2x^2.(-2x) + x.x^2 + x.(-2x) + 1.x^2 + 1.(-2x) \\
&= 2x^4 - 4x^3 + x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x \\
&= 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x
\end{aligned}$$

Semelhante ao caso da adição, podemos representar o produto $p(x).q(x)$ simplesmente por $(p.q)(x)$.

Propriedades da Multiplicação

(i) **Associatividade:** Dados p, q, r polinômios, temos:

$$(p.q)(x).r(x) = p(x).(q.r)(x)$$

(ii) **Comutatividade:**

$$(p.q)(x) = (q.p)(x)$$

(iii) **Elemento Neutro:** Existe um polinômio $u(x)$ tal que

$$p(x).u(x) = p(x)$$

Quem é o polinômio $u(x)$ na propriedade (iii)?

Grau do produto

Como fica o grau no produto $(p.q)(x)$?

Método prático para multiplicação

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4, \quad Q(x) = 2x^2 + x + 6$$

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
		1	3	-2	4
			2	1	6
		6	18	-12	24
	1	3	-2	4	
2	6	-4	8		
2	7	5	24	-8	24

Logo, $(P.Q)(x) = 2x^5 + 7x^4 + 5x^3 + 24x^2 - 8x + 24$.

Exercício

a. Multiplicar os polinômios $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 7x + 1$ e $q(x) = 2x^2 + x + 6$
b. Calcular $p(10), q(10)$ e $(p.q)(10)$.
c. Multiplique 4271×216 e compare esse processo com a tabela do item (a).

Bases Numéricas

Somos acostumados a trabalhar com a base decimal, isto é, usamos os 10 símbolos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 para formar todos os outros números reais. Porém, existem outras bases. Algumas são mais conhecidas:

Binária: Utiliza apenas dois dígitos: 0,1

Octal: Utiliza apenas oito dígitos: 0,1,2,3,4,5,6,7

Hexadecimal: Utiliza 16 dígitos!!! Como? Acrescentando letras: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F.

Representação em outras bases

Considere o número 175 (cento e setenta e cinco). Observe que

$$175 = 100 + 70 + 5$$

- Em outros termos: 1 centena + 7 dezenas + 5 unidades
- Ou seja,
$$175 = 1 * 100 + 7 * 10 + 5 * 1$$
Que também pode ser escrito da seguinte forma:
$$175 = \boxed{1} * 10^2 + \boxed{7} * 10^1 + \boxed{5} * 10^0$$
- Se estivéssemos usando a base octal, que quantidade representaria o número $(175)_8$?
- E que quantidade representaria $(175)_2$ e $(175)_{16}$?

Exemplos

Represente as seguintes **quantidades**:

- $(101011001)_2$
- $(3402)_8$
- $(3AF21)_{16}$

Transformando a partir da representação decimal

E como representar uma quantidade em outra base?

- Por exemplo, a quantidade 13 na base octal.

  0,1,2,3,4,5,6,7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 , 20, 21, 22, 23...
- Veja que na base octal, os números são formados combinando-se 8 símbolos. Vejamos a divisão de 13 por 8:

$$\begin{array}{r|l} 13 & 8 \\ \cline{2-2} 5 & 1 \end{array}$$

- Isto é,

$$13 = 1 * 8 + 5 = \boxed{1} * 8^1 + \boxed{5} * 8^0$$

- Daí, $(13)_{10} = (15)_8$

Exemplos

Transformar...

- A quantidade 139 para as outras três bases.
- A quantidade 2354 para as outras três bases.

Exemplos

Transformar...

- O número $(231)_8$ para a base binária.
- O número $(4BC56C)_{16}$ para a base octal.

Sumário

Divisão de polinômios

Dados os polinômios $p(x)$ e $d(x)$, dividir p por d significa encontrar polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que

$$p(x) = d(x).q(x) + r(x)$$

com $\partial r < \partial d$ ou $r(x) = 0$. Esta última restrição tem como objetivo a unicidade na determinação de $q(x)$ e $r(x)$.

Exemplo

Considere $p(x) = x^2 + 2x$ e $d(x) = x + 1$. Temos:

$$x^2 + 2x = \underbrace{(x+1)}_{d(x)}\underbrace{(x+1)}_{q(x)} + \underbrace{(-1)}_{r(x)}$$

com $\partial r < \partial d$. Mas também é verdade que

$$x^2 + 2x = \underbrace{(x+1)}_{d(x)} . \underbrace{(x^2+2x)}_{q(x)} + \underbrace{(-x^3 - 2x^2)}_{r(x)}$$

porém, neste caso, $\partial r > \partial d$.

De modo geral, temos:

$$\partial p(x) = \partial\big(d(x).q(x)+r(x)\big) = max\{\partial(d.q), \partial r\} = max\{\partial d+\partial q, \partial r\}$$

Como $\partial r < \partial d$, então, certamente, $\partial r < \partial d + \partial q$. Daí,

$$\partial p = \partial d + \partial q$$

ou seja, o grau do polinômio quociente a ser determinado será $\partial p - \partial d$.

Notação

Podemos, também, usar notação semelhante à da divisão de números inteiros:

$$\begin{array}{r|l} p(x) & d(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$$

- $p(x)$: dividendo;
- $d(x)$: divisor;
- $q(x)$: quociente;
- $r(x)$: resto.

Como na divisão de números inteiros, quando o resto é igual a zero, dizemos que o polinômio $p(x)$ é *divisível* por $d(x)$.

Exemplo

Iniciemos dividindo polinômios por monômios.

Considere $p(x) = 4x^5 - 3x^4 + 2x^2$ e $d(x) = 3x^2$. Neste caso a divisão de $p(x)$ por $d(x)$ se baseia nas propriedades de potência de números reais (ou complexos).

$$
\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{4x^5 - 3x^4 + 2x^2}{3x^2} = \frac{4x^5}{3x^2} - \frac{3x^4}{3x^2} + \frac{2x^2}{3x^2} \\
&= \frac{4}{3}x^{5-2} - \frac{3}{3}x^{4-2} + \frac{2}{3}x^{2-2} = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\underbrace{4x^5 - 3x^4 + 2x^2}_{p(x)} = \underbrace{\left(\frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}\right)}_{q(x)} \cdot \underbrace{(3x^2)}_{d(x)} + \underbrace{0}_{r(x)}
$$

Método de Descartes

Um método empregado na divisão de polinômios que se aplica a qualquer caso, mas que não é muito prático dependendo dos graus envolvidos, é o de Descartes. O método se baseia na análise dos graus de dividendo, divisor, quociente e resto.

Como já vimos, na divisão

$$\begin{array}{r|l} p(x) & d(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

temos $\partial q = \partial p - \partial d$ e $\partial r < \partial d$.

Exemplo

Considere $p(x) = 4x^2 + 2x - 1$ e $d(x) = 2x + 3$.

$\partial p = 2, \partial d = 1 \Rightarrow \partial q = 1$ e $\partial r < 1$.

Ou seja,

$$\begin{array}{c|c} 4x^2 + 2x - 1 & 2x + 3 \\ \cline{2-2} r & ax + b \end{array}$$

Que equivale a:

$$\begin{aligned} (4x^2 + 2x - 1) &= (2x + 3)(ax + b) + r \\ &= 2ax^2 + (2b + 3a)x + (3b + r) \end{aligned}$$

Ou seja, $4 = 2a$, $2 = 2b + 3a$, $-1 = 3b + r$ e

q(x)=2x-2,   r(x)=5

Exemplo

Se $p(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 1$ e $d(x) = x^2 - 1$, então

$$\begin{array}{c|c} 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} sx + t & ax^2 + bx + c \end{array}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 1 &= (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c) + (sx + t) \\ &= ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax^2 - bx - c + sx + t \\ &= ax^4 + bx^3 + (c - a)x^2 + (s - b)x + (t - c) \end{aligned}$$

Daí,

$$a = 3, \quad b = 2, \quad c - a = -3, \quad s - b = 1, \quad t - c = 1$$

e

$$q(x) = 3x^2 + 2x, \quad r(x) = 3x + 1$$

Exercícios - Método de Descartes

- $(2x^4 - 6x + 1) : (x^2 + 2)$
- Determine a e b para que $(4x^4 + ax^2 + bx + 2) : (2x^2 - 3x + 1)$ tenha resto $-4x + 5$.
- Dividindo-se $2x^3 - 3x^2 + 8x + 3$ por $d(x)$ obtém-se $q(x) = 2x - 1$ e resto $r(x) = 3x + 5$. Determine $d(x)$.