Polinômios - Parte 1

Prof. Márcio Nascimento

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática Básica III - 2019.2
www.matematicauva.org
marcio@matematicauva.org

12 de novembro de 2019

Sumário

Sumário

Um *monômio* é uma expressão algébrica composta pela multiplicação entre números (não nulos) e, possivelmente, incógnitas, isto é, letras que representam uma quantidade desconhecida a princípio.

- $2x^2$
- $4abc^2$
- xy^2z
- -7

O *grau de um monômio* é a soma das potências das incógnitas que o compõem.

- $2x^2$ tem grau 2.
- $4abc^2$ tem grau 4.
- xy^2z tem grau 4.
- -7 tem grau zero.
- Qual seria o grau de 0?

Um *binômio* é uma soma de dois monômios.
O *grau de um binômio* é dado pelo maior grau entre os monômios que o compõem.

- $2x^2 + 3x$ é um binômio com uma incógnita e grau 2.
- $3xy^2 - 2xy$ é um binômio com duas incógnitas e grau 3.
- $2w - 1$ é um binômio com uma incógnita e grau 1.
- $4x^2y^3z + 5xy^4z$ é um binômio com 3 incógnitas e grau 6.

Já um *trinômio* nada mais é do que a soma de três monômios.
Seguindo o padrão, o *grau de um trinômio* é dado pelo maior grau entre os monômios que o compõem.

- $2x^2 + 3x - 1$ é um trinômio com uma incógnita e grau 2.
- $4xyz^2 - 3xy^2z + 2x^2y^2z^3$ é um trinômio com três incógnitas e grau 7.

Operações com binômios e trinômios podem resultar em desenvolvimentos interessantes.

- Produto da soma pela diferença:

$$\begin{aligned}(x-y)(x+y) &= x^2+xy-yx-y^2\\ &= x^2-y^2\end{aligned}$$

- Trinômio Quadrado Perfeito:

$$\begin{aligned}(x\pm y)^2 &= (x\pm y)(x\pm y)\\ &= x^2\pm xy\pm yx+y^2\\ &= x^2\pm 2xy+y^2\end{aligned}$$

Sumário

Generalizando o conceito de binômios e trinômios definimos, então, os *Polinômios* como a soma de uma quantidade qualquer de monômios.

- $2x^2 - 1$ é um polinômio de grau 2.
- $x^3 + x^2 + 2x + 1$ é um polinômio de grau 3.
- $x^3y^2 - 4x^2y + 3xy - 3x + 2y - 1$ é um polinômio de grau 5.

Expressão geral de um polinômio

Daqui por diante vamos nos ater aos polinômios de uma incógnita, cuja expressão geral é a seguinte:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ou

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Onde os números (reais ou complexos) $a_n \neq 0, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são os *coeficientes*, x é a *incógnita* e n é o grau do polinômio.

Função Polinomial

Se x for variável, então temos uma ***Função Polinomial***:

$$\begin{aligned} p \quad : \quad & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & x \longmapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

Sendo uma função, atribuindo valores a x temos o *valor numérico* do polinômio. Observe ainda que pela construção de $p(x)$, não há restrições em seu domínio. Além disso, quando p está definido em $\mathbb{R}$, é possível esboçar o seu *gráfico*.

- Se $p(x) = 3x^2 - 1$ então o valor numérico de p para $x = 1$ é... $p(1) = 2$.
- Se $q(x) = 2ix^3 + 2x - 1$, então o valor numérico de q para $x = i$ é... $q(i) = 1 + 2i$.

- Uma função polinomial de grau 2 também é chamada de *função quadrática*.
- Se o grau da função polinomial for igual a 3, trata-se de uma *função cúbica*.

Raiz de polinômio

Uma *raiz* ou *zero* de uma função polinomial p é o valor a no seu domímio para o qual $p(a) = 0$.

- **Exemplo:** $a = 2$ é uma raíz para $p(x) = x^2 - 2x$ pois $p(2) = 0$.
- **Exemplo:** $a = 2i$ não é uma raíz para $p(x) = x^2 - 2x$ pois $p(2i) \neq 0$.

Podemos nos referir a função polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

também, simplesmente, como *polinômio*.

Duas características importantes encontradas em qualquer polinômio $p(x)$, são as seguintes:

- **$p(0)$ é igual ao termo independente**. De fato, para ilustrar, considere o polinômio

$$p(x) = 5x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 8x + 2$$

então

$$p(0) = 5.(0)^4 - 4.(0)^3 - 2.(0)^2 + 8.(0) + 2 = 2$$

- Em geral, se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

então

$$p(0) = a_n.(0)^n + a_{n-1}.(0)^{n-1} + ... + a_1.(0) + a_0 = a_0$$

$p(1)$ é a soma dos coeficientes do polinômio. Com efeito, considerando novamente $p(x) = 5x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 8x + 2$, temos:

$p(1) = 5.(1)^4 - 4.(1)^3 - 2.(1)^2 + 8.(1) + 2 = 5 - 4 - 2 + 8 + 2 = 9$

Em geral, se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

então

$p(1) = a_n.(1)^n + a_{n-1}.(1)^{n-1} + ... + a_1.(1) + a_0 = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$

No gráfico

Como identificar as raízes, o termo independente e a soma dos coeficientes a partir do gráfico de uma função polinomial?

Sumário

Adição

Dados dois polinômios, digamos, $p(x)$ e $q(x)$, a *adição* é definida pela soma dos termos que os compõem.

$$\text{(i) } p(x) = 3x^2 + 2x - 1,\ q(x) = 4x^2 + x + 3$$
$$\Longrightarrow p(x) + q(x) = 7x^2 + 3x + 2$$
$$\text{(ii) } p(x) = 4x^5 - 4x^3 + x,\ q(x) = 5x^5 + x^3 + 2x$$
$$\Longrightarrow p(x) + q(x) = 9x^5 - 3x^3 + 3x$$
$$\text{(iii) } p(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2,\ q(x) = x^5 - 2x^3 + x$$
$$\Longrightarrow p(x) + q(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + x$$

Observe que não é necessário que os polinômios tenham o mesmo grau. Com relação a notação, podemos representar a soma de $p(x)$ e $q(x)$ de duas formas:

p(x)+q(x) ou (p+q)(x)

Propriedades da Adição de Polinômios

(i) **Associativa:** Dados os polinômios $p(x), q(x)$ e $r(x)$, temos:

$$(p+q)(x)+r(x)=p(x)+(q+r)(x)$$

(ii) **Comutativa:** Dados os polinômios $p(x), q(x)$, vale:

$$p(x)+q(x)=q(x)+p(x)$$

(iii) **Elemento Neutro:** Dado $p(x)$, existe $p_0(x)$ tal que

$$p(x)+p_0(x)=p(x)$$

(iv) **Simétrico (ou inverso aditivo):** Dado $p(x)$, $\exists\ \tilde{p}(x)$ tal que

$$p(x)+\tilde{p}(x)=p_0(x)$$

Observação:
Quem são $p_0(x)$ e $\tilde{p}(x)$ nas propriedades acima?

Subtração

Observação:

A *subtração* de polinômios é naturalmente definida como uma soma:

$$p(x) - q(x) = p(x) + \tilde{q}(x)$$

Doravante, vamos denotar o grau de um polinômio $p(x)$, isto é, a sua maior potência, por ∂p.
Das propriedades acima, temos:

$$\partial(p+q) \leq max\{\partial p, \partial q\}$$

Exemplo: $p(x) = 3x^4 - 5x^3 - 2x - 1$ e $q(x) = 2x^5 - 3x^4 - x + 2$

$$(p+q)(x) = 2x^5 - 5x^3 - 3x + 1$$

$\partial(p+q) = 5$

Exemplo: $p(x) = x^7 - x^5 + x^3$ e $q(x) = -x^7 + x^6 + x^4$

$$(p+q)(x) = x^6 - x^5 + x^4 + x^3$$

$\partial(p+q) = 6 \leq 7$

Igualdade de polinômios

Dois polinômios são ditos *iguais* quando são compostos pelos mesmos monômios.

Exemplo

Considere $p(x) = 3x^3 - 4x + 1$ *e* $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$*.*

$$\begin{aligned}
p(x) = q(x) \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^3 - 4x + 1 = ax^3 + bx^2 + cx + d \\
&\Leftrightarrow \quad 3x^3 - 4x + 1 - ax^3 - bx^2 - cx - d = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (3 - a)x^3 - bx^2 + (-4 - c)x + (1 - d) = 0
\end{aligned}$$

Para que esta igualdade seja verdadeira $\forall x \in \mathbb{C}$*, então:*

$$(3 - a) = 0, \; - b = 0, (-4 - c) = 0, (1 - d) = 0$$

Assim, $q(x) = 3x^3 + 0.x^2 + (-4)x + (1) = 3x^3 - 4x + 1 = p(x)$

Igualdade de Polinômios

Do exemplo anterior, concluímos que dois polinômios são iguais se, se somente se, eles têm os mesmos coeficientes.