ÁLGEBRA MATRICIAL - 2019.2 - LISTA 06

Caro estudante, o assunto desta lista está no vídeo #12 - Inversão de matrizes, do videocurso 2013. No nosso próximo encontro (28/11), tiraremos eventuais dúvidas bem como realizaremos a resolução em sala.

1. Seja $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e seja A uma matriz arbitrária de ordem 3×3.

   (a) Descreva as linhas de EA em termos das linhas de A.

   (b) Descreva as colunas de AE em termos das colunas de A.

   (c) Repita os itens (a) e (b) considerando as matrizes $E' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $E'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ em vez de E.

2. Para cada matriz elementar E abaixo, encontre uma matriz E' de modo que $E.E' = I$

   (a) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Encontre a matriz inversa de cada matriz abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 5 \\ 4 & -7 & 4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Para uma matriz quadrada A, explique por que cada uma das sentenças a seguir é **verdadeira**:

   (a) Se A possui uma linha ou coluna nula, então ela é singular.

   (b) Se A possui duas linhas ou duas colunas iguais, então ela é singular.

   (c) Se uma linha (ou coluna) é um multiplo de outra linha (ou coluna), então A é singular.

5. (a) O que é necessário para que uma matriz diagonal seja não singular? Neste caso, como seria a sua inversa?

   (b) E se apenas os elementos da diagonal secundária forem não nulos, a matriz tem inversa? Se sim, como seria? [Sugestão: construa um exemplo com matriz de ordem par e outro com matriz de ordem ímpar]

6. Se A é não singular e simétrica, isto é, $A^T = A$, mostre que A^{-1} é simétrica.

7. Demonstre ou dê um contra-exemplo: Para A e B quadradas, de mesma ordem e não singulares,
$$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$$

8. Um sistema S não homogêneo tem n equações e n variáveis. Prove ou dê um contra-exemplo: S terá única solução se, e somente se, A for não singular.

9. Mostre que $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1}$. O resultado continua válido para $(A^{-1})^n$?