Lista de Exercícios 05 - Álgebra Matricial - 2019.2

1. Uma rede de postos de combustíveis vende álcool e gasolina em 5 estabelecimentos diferentes, praticando os preços (por litro) indicados no quadro abaixo. Os dados são a previsão para o dia 22 de novembro de 2019.

Postos $\longrightarrow$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Álcool	$3,50$	$3,52$	$3,51$	$3,60$	$3,55$
Gasolina	$4,55$	$4,55$	$4,55$	$4,62$	$4,70$

   (a) Para esta data a empresa tem como meta vender exatamente 3,5 mil litros de cada tipo de combustível. Usando o que você já aprendeu sobre matrizes, construa o quadro com a projeção de arrecadação de cada posto com os dois tipos de combustítvel.

   (b) Suponha que o governo estadual criou um imposto sobre a venda de combustíveis, em que cada estabelecimento repassa 0,25% do valor de cada litro vendido. Monte um quadro que indique **quanto foi pago de imposto nesta data** pela venda de cada tipo de combustível em cada posto.

   (c) Caso, neste dia, os postos em questão tivessem vendido cada litro de combustível retirando o tributo mencionado no item (b), isto é, repassando um desconto aos clientes, quanto teria sido arrecadado por cada posto com a venda de cada tipo de combustível (conforme dados do item a)?

2. Resolva as equações matriciais:

   (a) $2X = I_{3\times3}$

   (b) $\dfrac{1}{3}X = [a_{rs}]_{2\times2}$ onde $a_{rs} = r.(1-s)$

3. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2X + 3Y &= [a_{rs}]_{2\times2} \\ 5X - Y &= [b_{rs}]_{2\times2} \end{cases}$$

   onde $a_{rs} = 1 - r + 2s$ e $b_{rs} = s^2 - r + 1$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^{2\times2} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times3}$ definida por: $f(X) = Y$, onde $Y = [y_{rs}]$ com $y_{rs} = x_{rs}$ se $r \leq 2$ e $s \leq 2$ e $y_{rs} = 0$ caso contrário.

   (a) É verdade que $f(\alpha.X) = \alpha.f(X)$?

   (b) É verdade que $f(X_1 + X_2) = f(X_1) + f(X_2)$?

   (c) Responda novamente os itens (a) e (b) acrescentando na definição de f a condição $y_{33} = 1$.

5. Cássio pensou em uma maneira diferente de realizar a adição de matrizes. Dadas, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ r & s & t \end{bmatrix}_{2\times3}$, a soma é definida por

$$A \oplus B = \left[\begin{array}{cc|ccc} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & r & s & t \end{array}\right]_{4\times5}$$

   (a) Para as matrizes $X_{5\times5}$ e $Y_{6\times6}$, qual a ordem da matriz $X \oplus Y$?

   (b) Em geral, se $X_{m\times n}$ e $Y_{p\times q}$, qual a ordem da matriz $X \oplus Y$?

   (c) Esta operação seria comutativa?

   (d) Esta operação seria associativa?

6. A **transposta** de uma matriz $A_{n\times m}$ é a matriz A^T de ordem $m \times n$ obtida a partir da troca de posição entre linhas e colunas de A, isto é, o que era linha em A passa a ser coluna em A^T.

   (a) Dê exemplo de uma matriz **simétrica**, isto é, uma matriz quadrada A, tal que $A^T = A$.

   (b) Dê exemplo de uma matriz **antissimétrica**, isto é, uma matriz quadrada A, tal que $A^T = -A$.

7. Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ 4x_1 + 2x_3 & = & 10 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & -2 \end{cases}$$

(a) Escreva a equação matricial do sistema ($AX = B$).

(b) Escreva a solução S do sistema na forma coluna e verifique, usando multiplicação de matrizes, que S satisfaz a equação $AX = B$.

8. Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

calcule os seguintes produtos quando possível:

(a) AB	(d) C^TB	(g) C^TC	(j) B^TB
(b) BA	(e) A^2	(h) $C.C^T$	
(c) CB	(f) B^2	(i) BB^T	(k) C^TAC

9. Uma matriz quadrada $U = [u_{ij}]$ é dita **triangular superior** sempre que $u_{ij} = 0$ para $i > j$, isto é, as entradas abaixo da diagonal principal são todas nulas.

(a) Se A e B são duas matrizes do tipo triangular superior, explique por que o produto AB também é uma matriz triangular superior.

(b) Se $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$ são duas matrizes do tipo triangular superior, o que está na diagonal principal de AB?

(c) $L = [l_{ij}]$ é dita **triangular inferior** quando $l_{ij} = 0$ para $i < j$. É verdade que o produto de duas matrizes do tipo triangular inferior, é também uma matriz triangular inferior?

10. Seja e_j a j-**ésima coluna unitária**, isto é, a j-ésima coluna de uma matriz identidade de ordem n. Para uma matriz arbitrária $A_{n\times n}$ descreva os seguintes produtos:

(a) $A.e_j$ (b) $e_i^T.A$ (c) $e_i^T.Ae_j$

11. Suponha que A e B são matrizes de ordem $m \times n$. Se ocorre $Ax = Bx$ para todo vetor coluna x, mostre que $A = B$. [Sugestão: o que acontece se x é uma coluna composta apenas por "1"?]