LISTA 03 - 2019.2 - Matemática Básica III

1. Dividir usando o método de Briot-Rufini.
   (a) $(x^3 - 4x^2 + x - 2) : (x + 1)$
   (b) $(x^4 - 3x^2 - 18) : (x - 2)$
   (c) $(6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x) : (3x + 1)$
   (d) $(10x^6 + 5x^5 + 10x^3 - 20x - 15) : (5x + 5)$

2. Dividir usando o método de Descartes
   (a) $(x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 10x - 24) : (x^2 - 6x + 5)$
   (b) $(ax^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 1) : (x^2 + 1)$ onde $a > 0$.
   (c) $(6x^3 + bx^2 + x - 3) : (2x^2 - 1)$ onde $b > 0$.
   (d) $(x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 2) : (3x^3 - 2x + 1)$

3. Dividir usando o método da chave
   (a) Itens da questão anterior.
   (b) Use sua criatividade para gerar exemplos interessantes de divisão.

4. Uma caixa retangular para um novo produto é projetada de modo que as três dimensões estão relacionadas pela variável x. O volume da caixa é dado por $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$ e a altura é sempre igual a $x + 2$. Quais as outras duas dimensões da caixa?

5. (a) Dados dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, com $\partial p = n$ e $\partial q = m$, qual o grau de $p \circ q$? E $\partial(q \circ p)$?

   (b) Encontre um par de polinômios tais que $p \circ q = q \circ p$.

6. (Geogebra) Uma fábrica de microondas tem a sua função lucro determinada por $L(x) = -0.0014x^3 + 0.3x^2 + 6x - 355$ onde x é o número de microondas vendidos anualmente.

   (a) Esboce o gráfico da função lucro.

   (b) Escolha uma área de visualização do gráfico razoável para esta situação.

   (c) Quais os zeros da função $L(x)$?

   (d) Qual deve ser a gama de microondas vendidos anualmente para que a fábrica tenha lucro?

7. (Geogebra) A rentabilidade de um fabricante de roupas pode ser modelada pela função $p(x) = -x^4 + 40x^2 - 144$, onde x é o número de itens vendidos (em milhares) e $p(x)$ é o lucro do fabricante em milhares de reais.

   (a) Esboce o gráfico da função p.

   (b) Quais os zeros da função?

   (c) Qual a quantidade mínima e a máxima de unidades que a compania deve vender para que tenha lucro?

   (d) Qual o lucro máximo da empresa? Quantas unidades devem ser vendidas para que se obtenha o lucro máximo?

8. (Geogebra) A venda anual de máquinas de fax para uso doméstico pode ser modelada por $f(x) = -0,17x^4 + 6,29x^3 - 77,65x^2 + 251x + 1100$, onde x é o número de anos a partir de 1990 e $f(x)$ é a venda anual em milhões de reais.

   (a) Esboce o gráfico de f.

   (b) Quais as tendências nas vendas sugeridas pelo gráfico?

9. Seja $p(t) = at^2 + bt + c$ um polinômio quadrático.

   (a) Mostre que $p(t)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a}(b^2 - 4ac)$$

   (b) Use o item (a) para determinar todas as raízes da equação $t^2 - 7t + 12 = 0$.

10. (a) Seja r um zero da função polinomial $p(t) = at^2 + bt + c$. Verifique que $p(t) - p(r) = (t - r)(at + ar + b)$.

    (b) Mostre que r é um zero de um polinômio quadrático se, e somente se, $p(t)$ pode ser escrito na forma $(t - r).q(t)$ para algum polinômio linear $q(t)$.

11. Seja $at^2 + bt + c$ um polinômio com coeficientes complexos.

    (a) Mostre que $at^2 + bt + c$ pode ser escrito como uma constante vezes o quadrado de um polinômio linear se, e somente se, seu discriminante $b^2 - 4ac$ é nulo. Neste caso, mostre que há apenas 1 zero para o polinômio,

    (b) Mostre que se o discriminante do polinômio não se anula, então existem dois zeros.

    (c) Sejam m e n os zeros de $at^2 + bt + c$ (caso o discriminante seja nulo, considere $m = n$). Mostre que $at^2 + bt + c = a(t - m)(t - n)$.

    (d) Mostre que a soma dos zeros de $at^2 + bt + c$ é igual a $\dfrac{-b}{a}$ e que o produto é igual a $\dfrac{c}{a}$.

12. (a) Seja $p(t)$ um polinômio cúbico. Mostre que r é uma raiz da equação $p(t) = 0$ se, e somente se, $p(t) = (t - r).q(t)$ para algum polinômio quadrático $q(t)$.

    (b) Determine (por inspeção) uma raiz para o polinômio $p(t) = t^3 - 4t + 3$ e use essa informação para encontrar todas as raizes de p.

13. Considere a equação cúbica

$$x^3 - 12x^2 + 29x - 18 = 0$$

    Como visto acima, é possível resolver equações cúbicas em que o coeficiente do monomômio de grau 2 é nulo. Felizmente, uma transformação simples permite a redução de qualquer equação cúbica a tal formato. Verifique que a substituição $x = t + 4$ converte a equação dada para

$$t^3 - 19t - 30 = 0$$

    Obtenha por inspeção uma solução para a equação e depois resolva a equação em x.

14. Se $x + 3$ é um fator de $f(x) = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ encontre m e fatore $f(x)$.

15. Sejam $f(x) = x - k$ e $g(x) = x^n - k^n$ onde $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Encontre o quociente e o resto da divisão de $g(x)$ por $f(x)$.

16. Mostre que $x - 2$ é um fator de $2x^{n+2} - 5x^{n+1} + 2x^n - 2ax^3 + (5a + 2)x^2 - (2a + 5)x + 2$, onde n é um inteiro positivo.

17. Se $3x + 1$ e $2x - 3$ são fatores de $ax^3 + bx^2 - 47x - 15$ encontre os valores de a e b e, então, fatore o polinômio.

18. Encontre o polinômio $f(x)$ de grau 2 em $\mathbb{R}[x]$ tal que $f(2) = f(3) = 0$ e $f(4) = 6$.

19. Dado que $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ satisfaz

    (a) $f(x)$ tem um fator $x - 1$;

    (b) $f(x)$ deixa resto 2 quando dividido por $x - 3$;

    (c) $f(x)$ tem o mesmo resto r quando dividido por $x - 2$ e $x + 2$. Encontre b, c, d.

20. Se a, b são números reais distintos, mostre que $x^2 - (a + b)x + ab$ é fator de

$$x^m(a^n - b^n) + a^m(b^n - x^n) + b^m(x^n - a^n)$$

    onde m, n são inteiros positivos.

21. Se $x - a$ é um fator comum dos polinômios $f(x)$ e $g(x)$, mostre que existem polinômios $p(x)$ e $q(x)$ tais que $p(x)f(x) = q(x)g(x)$ com $\partial p < \partial g(x)$ e $\partial q < \partial f$.

22. Encontre um polinômio $f(x)$ tal que $x - 1$ é um fator de $f(x)$ e $f(x + h) - f(x) = h(2x + h + 1)$ para quaisquer números reais x e h.

23. Prove que $a_0 + a_2 - a_4 + a_6 - ... = 0$ e $a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + ... = 0$ são condições necessárias e suficientes para que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ tenha um fator $x^2 + 1$. [Sugestão: os teoremas envolvendo o Teorema do Resto podem ser estendidos para $\mathbb{C}[x]$.]

24. Seja n um inteiro positivo maior do que 1 e $a \neq -2$ um número real. Se o resto da divisão de x^n por $x^2 + ax - (a + 1)$ é $hx + k$, encontre h e k em termos de a.

25. Dado que o polinômio $f(x)$ deixar resto $3x + 5$ quando dividido por $(2x + 1)(x + 2)$, encontre os restos quando $f(x)$ é dividido por $2x + 1$ e $x + 2$ respectivamente.

26. Fatore $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$ e então mostre que $f(x)$ é um fator de $x^{4444} + x^{3333} + x^{2222} + x^{1111}$.

27. Dado n um inteiro positivo. Encontre a condição sobre n para que $x^2 + x + 1$ seja um fator de $x^{2n} + x^n + 1$.

28. Seja f um polinômio que deixa o mesmo resto quando dividido por $(x-a)(x-b)$ e $(x-a)(x-c)$. Mostre que $(a - b)f(x) + (b - c).f(a) + (c - a).f(b) = 0$.

29. Mostre que se $x + r$ é um fator comum de $x^3 + px^2 + q$ e $ax^3 + bx + x$, então é também um fator comum de $apx^2 - bx + aq - c$

30. Dados polinômios $g(x)$, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ mostre que se

$$g(x)|[f_1(x) + f_2(x)] \qquad e \qquad g(x)|[f_1(x) - f_2(x)]$$

    então $g(x)|f_1(x)$ e $g(x)|f_2(x)$.

31. Para os polinômios $g(x)$, $f_1(x)$, e $f_2(x)$, mostre que se:

$$g(x)|f_1(x), \quad g(x) \nmid f_2(x), \quad \text{então} \quad g(x) \nmid [f_1(x) + f_2(x)]$$

    de outro modo, se $g(x) \nmid f_1(x)$ e $g(x) \nmid f_2(x)$, é possível que $g(x)|[f_1(x) + f_2(x)]$? Justifique.

32. Seja $f(x)$ um polinômio. Mostre que se $(x - 1)|f(x^n)$ então $(x^n - 1)|f(x^n)$.

33. Sejam $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Se $(x^2 + x + 1)|[f(x^3) + +x.g(x^3)]$, prove que $(x - 1)|f(x)$ e $(x - 1)|g(x)$.

34. Se os polinômios $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ satisfazem

$$(x^2+1)h(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0$$

$$(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0$$

mostre que $f(x)$ e $g(x)$ são divisíveis por x^2+1.

Nas questões a seguir, $p(x) \backsim q(x)$ signfica que os polinômios são associados.

35. Mostre que $\backsim$ define uma relação de equivalência em $\mathbb{R}[x]$. Encontre a classe de equivalência de $2x^2+2$.

36. Suponha que um polinômio não constante $p(x)$ é irredutível e $p(x) \backsim q(x)$. Mostre que $q(x)$ também é irredutível.

37. Mostre que para polinômios não nulos $p(x)$ e $q(x)$, tem-se $p(x) \backsim q(x)$ se, e somente se, $p(x)|q(x)$ e $q(x)|p(x)$.

38. Seja $r(x)$ um polinômio. Para polinômios não nulos $p(x)$ e $q(x)$ tais que $p(x) \backsim q(x)$, mostre que

    (a) $r(x)|p(x)$ se, e somente se, $r(x)|q(x)$.

    (b) $p(x)|r(x)$ se, e somente se, $q(x)|r(x)$.

39. Sejam polinômios não nulos $p(x), p_1(x), q(x), q_1(x)$. Se $p(x) \backsim p_1(x)$ e $q(x) \backsim q_1(x)$, mostre que $p(x).q(x) \backsim p_1(x).q_1(x)$. É verdade que $p(x)+q(x) \backsim p_1(x)+q_1(x)$?

---

40. Decomponha em fatores irredutíveis nos conjuntos $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$:

    (a) x^3+1

    (b) x^3-3x^2-3x+1

    (c) x^4-x^2+2x-1

    (d) x^6-1

41. Mostre que x^4+1 é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ mas é redutível sobre $\mathbb{R}$.

42. Seja $\mathbb{F}$ o conjunto que representa $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Seja $a \in \mathbb{F}^*$ e $f(x) \in \mathbb{F}[x]$.

    (a) Se $af(x)$ é irredutível em $\mathbb{F}[x]$, prove que $f(x)$ é irredutível em $\mathbb{F}[x]$

    (b) Se $f(ax)$ é irredutível sobre $\mathbb{F}[x]$, mostre que $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{F}[x]$.

    (c) Se $f(x+a)$ é irredutível sobre $\mathbb{F}[x]$, mostre que $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{F}[x]$.

43. Seja $\mathbb{F}$ o conjunto que representa $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ com $\partial p \geq 0$. Mostre que se

$$p(x)|f(x).g(x) \Longrightarrow p(x)|f(x) \quad ou \quad p(x)|g(x)$$

para quaisquer $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, então $p(x)$ é irredutível em $\mathbb{F}[x]$.

44. Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$ e têm uma raiz comum, mostre que $p(x) \backsim q(x)$.