

1ª Avaliação Parcial - Álgebra Matricial - 2019.2

Estudante:

IMPORTANTE:

- A resolução da prova deve ser feita de maneira **individual**.
- Término da aplicação da prova: **21h20**;
- Permitido uso de calculadora, mas não o uso de smartphone;
- Resoluções à lápis e/ou rasuradas não poderão ser contestadas depois de divulgada a nota;
- Além da folha com as questões, você recebeu mais 3 folhas. Coloque seu nome em todas, **não destaque** e devolva tudo ao entregar a prova.

1. **(Para a resolução desta questão, use sistemas lineares e o método de Gauss-Jordan)** Isac, Emanuel e Dudu foram convidados para trabalhar no reforço universitário do Tio Patrick, um cursinho direcionado especificamente para os estudantes com dificuldades em Álgebra Matricial. O quadro abaixo mostra o valor cobrado (em Reais por hora) por cada um deles nos respectivos conteúdos:

Professor	Resolução de Sistemas	Cálculo de Matriz Inversa	Determinante
Isac	20	40	10
Emanuel	10	20	40
Dudu	40	10	20

Cada professor deu a mesma quantidade de aulas sobre “Resolução de Sistemas”. O mesmo ocorreu com o assunto “Cálculo de Matriz inversa” e com o assunto “Determinantes”. Tio Patrick define que cada professor atenderá 1 aluno por hora. Ao final dos serviços ele pagou R\$ 1.700,00 a Isac, R\$ 1.200,00 a Emanuel e R\$ 1.300,00 a Dudu. Considerando que cada aluno pagou R\$ 50,00 por uma hora de aula, responda:

- (3,0) Quantas aulas de cada assunto foram dadas por cada professor?
 - (1,0) Quantos alunos (no máximo) foram atendidos no reforço universitário?
 - (1,0) Se cada hora de atendimento à aluno tem um custo de R\$ 9,50 (material, energia, aluguel, etc), qual o lucro (ou prejuízo) de Tio Patrick ao final dessas aulas?
2. ¹ **(Para a resolução desta questão, use sistemas lineares e o método de Gauss-Jordan)** Jéssica abriu uma sorveteria que vende os seguintes sabores: tapioca, batata doce, tamarindo, caju e ata. Assis, Edson e Micaele foram lá e fizeram os seguintes pedidos:
- **Assis:** 5 de tapioca, 2 de batata doce, 3 de tamarindo, 6 de caju, 2 de ata;
 - **Edson:** 2 de tapioca, 4 de batata doce, 3 de tamarindo, 5 de caju, 2 de ata;
 - **Micaele:** 3 de tapioca, 2 de batata doce, 2 de tamarindo, 6 de caju, 4 de ata;

Ao final, Assis, Edson e Micaele perceberam que Jéssica não havia exposto o valor de cada sabor, porém, cada um pagou um total de, respectivamente, R\$44,00, R\$41,00, R\$42,00.

- (1,0) Micaele disse que não sabia o valor de cada sabor, mas que se o sabor caju custasse 3 reais e o sabor ata custasse 2 reais, ela conseguiria determinar o valor dos outros três sabores e a conta fechava. Está correta a afirmação de Micaele? Se sim, quais os valores dos outros três sabores? Se não, justifique.
- (1,0) Edson disse que também não sabia o valor de cada sabor, mas que se os sabores caju e ata custassem 2 reais cada, ele conseguiria determinar o valor dos outros três sabores e a conta também fechava. Está correta a afirmação de Edson? Se sim, quais os valores dos outros três sabores? Se não, justifique.
- (1,0) Apresente uma terceira opção (mas que seja coerente) para os valores de cada sabor de modo que o total pago por cada cliente continue sendo R\$44,00, R\$41,00, R\$42,00 respectivamente.

¹A montagem e resolução correta do sistema desta questão, valem 2,0 pontos

01

x: QUANTIDADE DE AULAS DADAS SOBRE "RESOLUÇÃO DE SISTEMAS"

y: QUANTIDADE DE AULAS DADAS SOBRE "CÁLCULO DE MATRIZ INVERSA"

z: QUANTIDADE DE AULAS DADAS SOBRE "DETERMINANTES"

ISAAC: RECEBEU R\$ 1700,00

SE ELE COBRA 20 REAIS POR CADA HORA DE AULA SOBRE "RESOLUÇÃO DE SISTEMAS", ENTÃO PELAS x AULAS ELE RECEBEU $20x$ REAIS. DA MESMA FORMA, RECEBEU $40y$ REAIS PELAS AULAS DE "CÁLCULO DE MATRIZ INVERSA" E $10z$ REAIS PELAS AULAS DE "DETERMINANTES". ASSIM,

$$20x + 40y + 10z = 1700$$

EMANUEL: PELO RACIOCÍNIO ANTERIOR, TEMOS A EQUAÇÃO: $10x + 20y + 40z = 1200$

DUDO: $40x + 10y + 20z = 1300$

TEMOS, ENTÃO, UM SISTEMA A RESOLVER:

$$\begin{cases} 20x + 40y + 10z = 1700 \\ 10x + 20y + 40z = 1200 \\ 40x + 10y + 20z = 1300 \end{cases} \xrightarrow{\text{NOTAÇÃO MATRICIAL}} \left[\begin{array}{ccc|c} 20 & 40 & 10 & 1700 \\ 10 & 20 & 40 & 1200 \\ 40 & 10 & 20 & 1300 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1/10 \\ \leftarrow L_2/10 \\ \leftarrow L_3/10 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 170 \\ 1 & 2 & 4 & 120 \\ 4 & 1 & 2 & 130 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 120 \\ 2 & 4 & 1 & 170 \\ 4 & 1 & 2 & 130 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 120 \\ 0 & 0 & -7 & -90 \\ 0 & -7 & -14 & -350 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_3/-7 \\ \leftarrow L_2/-7 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 120 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right] \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right] \leftarrow L_2 - 2L_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{SOLUÇÃO DO} \\ \text{SISTEMA} \end{array} \quad \begin{array}{l} x=20 \\ y=30 \\ z=10 \end{array}$$

FORMA ESCALONADA REDUZIDA

(a) CADA PROFESSOR DEU

• 20 AULAS DE "RESOLUÇÃO DE SISTEMAS"

• 30 AULAS DE "CÁLCULO DE MATRIZ INVERSA"

• 10 AULAS DE "DETERMINANTES"

(b) CADA PROFESSOR MINISTROU, AO TUDO, 60 AULAS. PORTANTO, CADA PROFESSOR ATENDEU, NO MÁXIMO, 60 ALUNOS. SENDO TRÊS PROFESSORES, FORAM ATENDIDOS, NO MÁXIMO, 180 ALUNOS

(c) CUSTO COM PROFESSORES: $1700 + 1200 + 1300 = \underline{4200 \text{ REAIS}}$

CUSTOS FIXOS: $180 \cdot (9,50) = \underline{1710 \text{ REAIS}}$

RECEITA: $180 \cdot (50,00) = \underline{9000 \text{ REAIS}}$

LUCRO: $9000 - 1710 - 4200 = \underline{3090 \text{ REAIS}}$

2) Sejam x, y, z, w, t os preços cobrados pelos sorvetes de tapioca, batata doce, tamarindo, caju e ata, respectivamente. As equações a seguir representam os pedidos de Assis, Edson e Micaele, respectivamente:

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z + 6w + 2t = 44 \\ 2x + 4y + 3z + 5w + 2t = 41 \\ 3x + 2y + 2z + 6w + 4t = 42 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{NOTAÇÃO} \\ \text{MATRICIAL} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 5 & 2 & 3 & 6 & 2 & 44 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 2 & 41 \\ 3 & 2 & 2 & 6 & 4 & 42 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow 5L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow 5L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 5 & 2 & 3 & 6 & 2 & 44 \\ 0 & 16 & 9 & 13 & 6 & 117 \\ 0 & 4 & 1 & 12 & 14 & 78 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow 8L_1 - L_2 \\ \\ \leftarrow 4L_3 - L_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 40 & 0 & 15 & 35 & 10 & 235 \\ 0 & 16 & 9 & 13 & 6 & 117 \\ 0 & 0 & -5 & 35 & 50 & 195 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1/5 \\ \\ \leftarrow L_3/-5 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 8 & 0 & 3 & 7 & 2 & 47 \\ 0 & 16 & 9 & 13 & 6 & 117 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -10 & -39 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ \leftarrow L_2 - 9L_3 \\ \\ \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 8 & 0 & 0 & 28 & 32 & 164 \\ 0 & 16 & 0 & 76 & 96 & 468 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -10 & -39 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1/8 \\ \leftarrow L_2/16 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} x & y & z & \alpha & \beta & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 7/2 & 4 & 41/2 \\ 0 & 1 & 0 & 19/4 & 6 & 117/4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -10 & -39 \end{array}$$

SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA:

$$x = \frac{41}{2} - 7\alpha/2 - 4\beta$$

$$y = \frac{117}{4} - 19\alpha/4 - 6\beta$$

$$z = -39 + 7\alpha + 10\beta$$

$$w = \alpha$$

$$t = \beta$$

(a) CAJU: 3 REAIS E ATA: 2 REAIS $\Rightarrow \alpha = 3, \beta = 2$

SOLUÇÃO PARTICULAR: $x = \frac{41}{2} - 7 \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$$y = \frac{117}{4} - 19 \cdot \frac{3}{4} - 6 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

$$z = -39 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{z = 2}$$

Logo, MICHAEL ESTÁ CORRETA E OS SABORES CUSTAM

R\$ 2,00, R\$ 3,00, R\$ 2,00, R\$ 3,00, R\$ 2,00

TAPIOCA

BARRA
DOCE

TAMARINDO

CAJU

ATA

(b) CAJU: 2 REAIS E ATA: 2 REAIS $\Rightarrow \alpha = 2, \beta = 2$

SOLUÇÃO PARTICULAR: $x = \frac{41}{2} - 7 \cdot \frac{2}{2} - 4 \cdot 2 \Rightarrow x = 5,5$

$$y = \frac{117}{4} - 19 \cdot \frac{2}{4} - 6 \cdot 2 \Rightarrow y = 7,75$$

$$z = -39 + 7 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{z = -5} \leftarrow \text{INCOERÊNCIA}$$

A SUGESTÃO DE EDSON FARIA COM QUE O SORVETE DE TAMARINDO CUSTASSE
UM VALOR NEGATIVO. CONTRADIÇÃO!!!

(c) Escolhendo, por exemplo, $\alpha=1$ e $\beta=4$, temos

$$x = 41/2 - 7 \cdot 1/2 - 4 \cdot 4 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 117/4 - 19 \cdot 1/4 - 6 \cdot 4 \Rightarrow y = 0,50$$

$$z = -39 + 7 \cdot 1 + 10 \cdot 4 \Rightarrow z = 8$$

DESTA FORMA, OS SABORES CUSTARIAM:

R\$ 1,00, R\$ 0,50, R\$ 8,00, R\$ 1,00 e R\$ 4,00

TAPIOLA

PRIMA
DOCE

TAMARINDO

CAJU

ATA