LISTA 02 - 2019.2 - Matemática Básica III

1. Coloque os números complexos abaixo na forma polar (encontre o módulo e o argumento $\theta \in [0, 2\pi)$).

   (a) $(1+i)^{1000}$

   (b) $\dfrac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}}$

   (c) $\dfrac{(2\sqrt{3}+2i)^8}{(1-i)^6} + \dfrac{(1+i)^6}{(2\sqrt{3}-2i)^8}$

2. Usando a 1ª Fórmula de Moivre, mostre que

$$\text{sen}5x = 16\text{sen}^5 x - 20\text{sen}^3 x + 5\text{sen}x \qquad \text{e} \qquad \cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

3. Um hexágono regular inscrito numa circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o afixo[1] de $z = 2i$. Que números complexos representam os outros cinco vértices do hexágono?

4. Resolva as seguintes equações:

   (a) $z^3 - 125 = 0$ (b) $z^4 + 16 = 0$ (c) $z^3 + 64i = 0$ (d) $z^3 - 27i = 0$

5. Encontre todos os números complexos z tais que $|z| = 1$ e $\left|\dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z}\right| = 1$.

6. Encontre as raízes n-ésimas para $n \in \{2, 3, 4, 5, 12\}$ dos seguintes complexos:

   (a) $z = 7 - 24i$ (b) $z = 18 + 26i$ (c) $z = 2 - i\sqrt{12}$

7. Sejam $U_n = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n-1}\}$ as raízes da equação $z^n = 1$.

   (a) É verdade que $1 \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$?

   (b) Determine o conjunto U_5.

   (c) Uma raiz $\varepsilon_k \in U_n$ é dita **primitiva** se para cada $m < n$ tem-se $\varepsilon_k^m \neq 1$. Encontre as raízes primitivas em U_4 e U_5.

   (d) Quantos elementos em comum possuem os conjuntos U_6 e U_8?

   (e) Quantos elementos em comum possuem os conjuntos U_4 e U_7?

   (f) Se $\varepsilon_j, \varepsilon_k \in U_n$, então $\varepsilon_j \cdot \varepsilon_k \in U_n$ para quaisquer $j, k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

   (g) Se $\varepsilon_k \in U_n$, então $\varepsilon_k^{-1} \in U_n$ para todo $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

8. Para $r \in \mathbb{R}^*$, definimos uma **homotetia** de centro 0 e raio r pela função $H_R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $H_r(z) = rz$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Para cada $\theta \in \mathbb{R}^*$, definirmos a **rotação** de centro 0 e ângulo θ pela função $R_\theta : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ dada por $R_\theta(z) = (cis\theta)z$, para todo $z \in \mathbb{C}^*$.

   (a)Seja u o vetor com ponto inicial em 0 e ponto final em z. Se $w = H_r(z)$, mostre que ru é o vetor com ponto inicial em 0 e ponto final em w.

   (b) Se $w = r.cis\theta$ é um número complexo não nulo, prove que para todo $z \in \mathbb{C}^*$, tem-se

$$wz = H_r \circ R_\theta(z)$$

[1] Pesquise o que é afixo