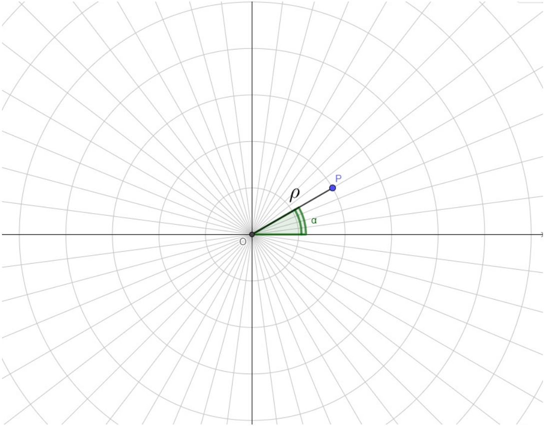
Números Complexos - Forma Trigonométrica - Radiciação

Matemática Básica III - 2019.2

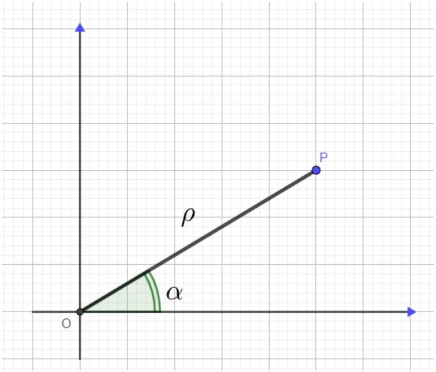
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Prof. Márcio Nascimento

22 de outubro de 2019

No encontro anterior...



No encontro anterior...



$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \rho.(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha) \end{aligned}$$

No encontro anterior...

$$z_1 = \rho_1(\cos\alpha_1 + i.\mathrm{sen}\alpha_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\alpha_2 + i.\mathrm{sen}\alpha_2)$$

- Multiplicação na forma polar

$$z_1.z_2 = \rho_1.\rho_2.[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i.\mathrm{sen}(\alpha_1+\alpha_2)]$$

- Divisão na forma polar

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i.\mathrm{sen}(\alpha_1-\alpha_2)]$$

- Potenciação na forma polar **[1ª Fórmula de Moivre]**

$$z = \rho(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha) \Rightarrow z^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + i.\mathrm{sen}(n\alpha))$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^*$

Radiciação - 2ª Fórmula de Moivre

Dado um complexo z não nulo e um inteiro positivo n, chama-se raiz n-ésima de z o complexo w tal que

$$w^n = z$$

(i) Sendo z e w complexos, podemos escrever ambos na forma polar:

$$z = \rho.(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha)$$

$$w = \xi.(\cos\beta + i.\mathrm{sen}\beta)$$

(ii) Além disso, sendo $w^n = z$, podemos escrever:

$$[\xi.(\cos\beta + i.\mathrm{sen}\beta)]^n = \rho.(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha)$$

$$\xi^n[\cos(n\beta) + i.\mathrm{sen}(n\beta)] = \rho.(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha)$$

Radiciação - 2ª Fórmula de Moivre

$$\xi^n[\cos(n\beta) + i.\mathrm{sen}(n\beta)] = \rho.(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha)$$

(iii) A igualdade acima equivale dizer que dois números complexos são iguais, ou seja, seus módulos são iguais e seus argumentos são iguais (a menos de uma quantidade inteira de voltas):

$$\xi^n = \rho$$

$$n\beta = \alpha + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

(iv) Daí, podemos dizer que :

$$w = \xi.(\cos\beta + i.\mathrm{sen}\beta) = \sqrt[n]{\rho}.\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i.\mathrm{sen}\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$$

Radiciação - 2ª Fórmula de Moivre

$$w = \xi.(\cos\beta + i.\mathrm{sen}\beta) = \sqrt[n]{\rho}.\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i.\mathrm{sen}\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

(v) A princípio, como k pode assumir infinitos valores, teríamos infinitas possibilidades para w. Porém, observe que:

k=0: $\frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n}$

k=1: $\frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}$

k=2: $\frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{4\pi}{n}$

$\vdots$

k=n: $\frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2\pi \equiv \frac{\alpha}{n}$

Radiciação - 2ª Fórmula de Moivre

$$w = \xi.(\cos\beta + i.\mathrm{sen}\beta) = \sqrt[n]{\rho}.\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i.\mathrm{sen}\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

(vi) Se testarmos valores de k negativos (em sequência) também observaremos este padrão, ou seja, que ocorrem apenas n valores **distintos**.

(vii) Vamos escolher a sequência $0, 1, 2, ..., n-1$

2ª Fórmula de Moivre

Seja $z \in \mathbb{C}^*$. As raízes n-ésimas de $z = \rho.(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha)$ são

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i.\mathrm{sen}\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

com $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Exemplo

Encontrar as raízes quadradas de $z = -1$

$\boxed{z = -1 = -1 + 0.i}$

Módulo: $|z| = 1$

Argumento: $\alpha = \pi$

Forma Polar: $z = 1.(\cos\pi + i.\text{sen}\pi)$

Raízes: $\sqrt{z} = \sqrt{\rho}\left(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{2} + i.\text{sen}\dfrac{\alpha + 2k\pi}{2}\right)$, com $k \in \{0, 1\}$

k=0: $\omega_0 = \sqrt{1}.(\cos\dfrac{\pi + 2.0.\pi}{2} + i.\text{sen}\dfrac{\pi + 2.0.\pi}{2}) = \cos\dfrac{\pi}{2} + i.\text{sen}\dfrac{\pi}{2} = 0 + i.1 = \boxed{i}$.

k=1: $\omega_1 = \sqrt{1}.(\cos\dfrac{\pi + 2.1.\pi}{2} + i.\text{sen}\dfrac{\pi + 2.1.\pi}{2}) = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i.\text{sen}\dfrac{3\pi}{2} = 0 + i.(-1) = \boxed{-i}$.

Exemplo

Encontrar as raízes quartas de $z = 2 - 2i$

$\boxed{z = 2 - 2i}$

Módulo: $|z| = 2\sqrt{2}$

Argumento: $\alpha = 315^0$

Forma Polar: $z = 2\sqrt{2}(\cos 315^0 + i.\text{sen}315^0)$

Raízes: $\sqrt[4]{2\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{315^0 + 360^0.k}{4} + i.\text{sen}\dfrac{315^0 + 360^0.k}{4}\right)$,

com $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

k=0: $\omega_0 = \sqrt[8]{8}.(\cos 78,75^0 + i.\text{sen}78,75^0) = \boxed{0,25 + 1,27i}$.

k=1: $\omega_1 = \sqrt[8]{8}.(\cos 168,75^0 + i.\text{sen}168,75^0) = \boxed{-1,27 + 0,25i}$.

k=2: $\omega_2 = \sqrt[8]{8}.(\cos 258,75^0 + i.\text{sen}258,75^0) = \boxed{-0,25 - 1,27i}$.

k=3: $\omega_3 = \sqrt[8]{8}.(\cos 348,75^0 + i.\text{sen}348,75^0) = \boxed{1,27 - 0,25i}$.