Números Complexos - Forma Trigonométrica

Matemática Básica III - 2019.2

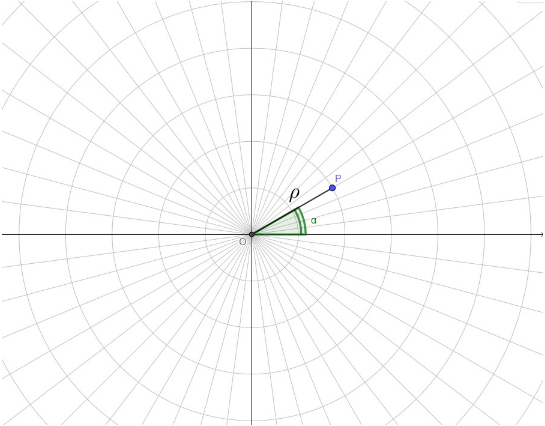
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Prof. Márcio Nascimento

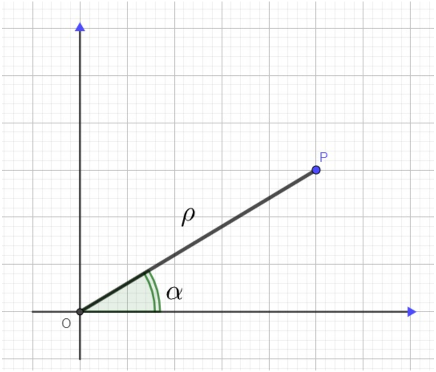
15 de outubro de 2019

Sumário

Forma Polar

No início vimos como identificar pontos do plano com elementos de $\mathbb{R}^2$ utilizando o sistema de coordenadas cartesianas (correspondência biunívoca). Agora vamos utilizar um outro sistema de posicionamento no plano: **o sistema polar**.





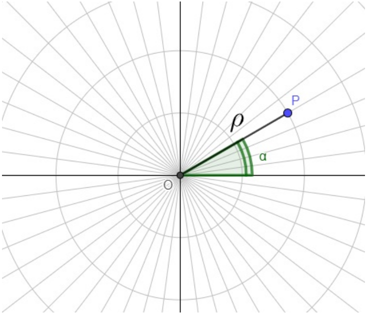
- $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$
- $x = \rho.\cos\alpha$
- $y = \rho.\mathrm{sen}\alpha$

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \rho.\cos\alpha + i.\rho.\mathrm{sen}\alpha \\ &= \rho.(\cos\alpha + i\mathrm{sen}\alpha) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Forma Trigonométrica} \\ &\quad \text{ou Polar} \end{aligned}$$

- O ponto P é chamado de **afixo**, ρ é chamado **módulo** e α o **argumento** de z.

Importante

Sobre o argumento



- Observe que para todo $k \in \mathbb{Z}$, o ângulo $\alpha + 2k\pi$ também é um argumento para o número complexo z.
- O argumento α (isto é, quando $k = 0$) é chamado **argumento principal** de z.

Exemplo

Encontrar a Forma Polar de $z = 1 + i\sqrt{3}$

- **Módulo:** $|z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$
- **Argumento:** **Observe que z está no primeiro quadrante.**

  $\cos\alpha = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{sen}\alpha = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  Ou, similarmente, $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{y}{x} = \sqrt{3}$

  $arc\ \ tg(\sqrt{3}) = 60^0 = \dfrac{\pi}{3} rad.$
- Portanto, $z = 2(\cos 60^0 + i.\mathrm{sen}60^0)$

  ou $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i.\mathrm{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$

Exemplo

Encontrar a Forma Polar de $z = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$

Módulo: $|z| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{9.2 + 9.2} = 6$

Argumento: Observe que z está no **QUARTO** quadrante.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -1$$

$$\Rightarrow \quad arc\ tg(-1) = -45^0 = -\frac{\pi}{4} rad.$$

Portanto, o argumento princial de z é $\boxed{\alpha = 315^0}$.

Forma Polar:

$$z = 6(\cos 315^0 + i.\mathrm{sen}315^0) = 6\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i.\mathrm{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$$

Observação

Alguns autores usam uma notação reduzida para a forma polar:

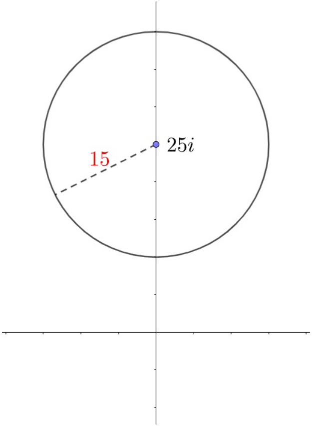
$$z = \rho(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha) =: \rho.cis\alpha$$

- Por exemplo, a forma polar de $z = 1 + i\sqrt{3}$ é

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2.cis\frac{\pi}{3}$$

Exemplo

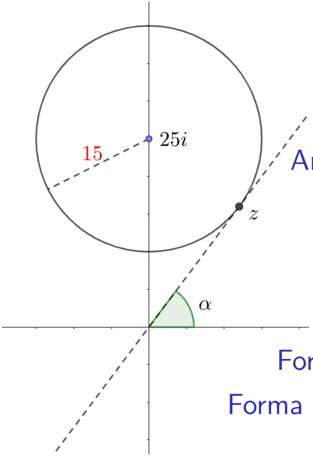
Entre todos os números complexos z tais que $|z - 25i| \leq 15$, encontrar o que tem o menor argumento principal.



- Em que ponto da circunferência está o número complexo z com menor argumento principal?

Exemplo

Entre todos os números complexos z tais que $|z - 25i| \leq 15$, encontrar o que tem o menor argumento principal.



Módulo: Usando o teorema de Pitágoras, temos $25^2 = 15^2 + |z|^2$, ou seja, $|z| = 20$.

Argumento: Seja β o complementar de α. Então $\cos\beta = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5}$, ou seja, $\beta = \arccos\dfrac{3}{5} \cong 36{,}87^0$ e portanto, $\alpha \cong 53{,}13^0$.

Forma Polar: $z = 20.cis(53{,}13^0)$

Forma Algébrica: $z = 12 + 16i$.

Multiplicação na Forma Polar

Considere dois números complexos z_1 e z_2 e suas respectivas formas polares

$$\rho_1(\cos\alpha_1 + i.\mathrm{sen}\alpha_1)$$

$$\rho_2(\cos\alpha_2 + i.\mathrm{sen}\alpha_2)$$

Multiplicando $z_1.z_2$, temos;

$$\begin{aligned}
z_1.z_2 &= \rho_1(\cos\alpha_1 + i.\mathrm{sen}\alpha_1)\rho_2(\cos\alpha_2 + i.\mathrm{sen}\alpha_2)\\
&= \rho_1.\rho_2.(\cos\alpha_1 + i.\mathrm{sen}\alpha_1).(\cos\alpha_2 + i.\mathrm{sen}\alpha_2)\\
&= \rho_1.\rho_2.[(\cos\alpha_1.\cos\alpha_2 - \mathrm{sen}\alpha_1.\mathrm{sen}\alpha_2) +\\
&\quad +i.(\mathrm{sen}\alpha_1.\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1.\mathrm{sen}\alpha_2)]\\
&= \rho_1.\rho_2.[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i.\mathrm{sen}(\alpha_1+\alpha_2)]
\end{aligned}$$

Exemplo

Considere

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i.\mathrm{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$$

Então

$$z_1.z_2 = 2.6.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) + i.\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 12.cis\frac{13\pi}{12}$$

Potenciação - 1ª Fórmula de Moivre

Quadrado de um número complexo

Se $z = \rho.(\cos\alpha + i\mathrm{sen}\alpha)$, então

$$z^2 = \rho^2.(\cos 2\alpha + i\mathrm{sen}2\alpha)$$

Potência inteira de um complexo - 1ª Fórmula de Moivre

Se $z = \rho.(\cos\alpha + i\mathrm{sen}\alpha)$, então

$$z^n = \rho^n.(\cos n\alpha + i\mathrm{sen}n\alpha)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração

Vamos separar a prova em três casos: $n = 0$, $n > 0$ e $n < 0$.
Para $n = 0$, temos:

$$z^0 = 1 = \rho^0.(\underbrace{\cos(0.\alpha)}_{=1} + i.\underbrace{\mathrm{sen}(0.\alpha)}_{=0})$$

Para provar o caso $n > 0$, vamos usar indução finita sobre n para mostrar que a Fórmula é válida.

$n = 1$: $z^1 = z = \rho.(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}\alpha) = \rho^1.(\cos 1.\alpha + i.\mathrm{sen}1.\alpha)$.

H. I. Suponha que $z^k = \rho^k.(\cos k\alpha + i.\mathrm{sen}k.\alpha)$

$k + 1$:

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k.z \\ &= [\rho^k.(\cos k\alpha + i.\mathrm{sen}k.\alpha)].[\rho.(\cos\alpha + i.\mathrm{sen}.\alpha)] \\ &= \rho^k.\rho[\cos(k\alpha + \alpha) + i.\mathrm{sen}(k\alpha + \alpha)] \\ &= \rho^{k+1}[\cos((k+1).\alpha) + i.\mathrm{sen}((k+1)\alpha)] \end{aligned}$$

Demonstração

Agora, considere n um número inteiro negativo. Então, podemos dizer que $n = -m$ onde m é um inteiro positivo.

$$
\begin{aligned}
z^n &= z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{\rho^m.(\cos m\alpha + i.\mathrm{sen}\, m\alpha)} \\
&= \frac{1}{\rho^m.(\cos m\alpha + i.\mathrm{sen}\, m\alpha)} \cdot \frac{(\cos m\alpha - i.\mathrm{sen}\, m\alpha)}{(\cos m\alpha - i.\mathrm{sen}\, m\alpha)} \\
&= \frac{1}{\rho^m} \frac{\cos m\alpha - i.\mathrm{sen}\, m\alpha}{[(\cos m\alpha)^2 - (i.\mathrm{sen}\, m\alpha)^2]} \\
&= \frac{1}{\rho^m} \frac{\cos m\alpha - i.\mathrm{sen}\, m\alpha}{[(\cos m\alpha)^2 + (\mathrm{sen}\, m\alpha)^2]} \\
&= \frac{1}{\rho^m} (\cos m\alpha - i.\mathrm{sen}\, m\alpha) \\
&= \rho^{-m}[\cos(-m\alpha) + i.\mathrm{sen}(-m\alpha)] \\
&= \rho^n[\cos(n\alpha) + i.\mathrm{sen}(n\alpha)]
\end{aligned}
$$

Sendo: cos(-x)=cos(x) e sen(-x)=-sen(x)

Exemplo

Sendo $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, calcular z^9

Módulo: $\rho = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2.$

Argumento: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ e z no primeiro quadrante. Portanto,

$$\alpha = \frac{\pi}{4} rad = 45^0$$

Forma Polar: $z = 2.cis\dfrac{\pi}{4}$

Potência: $z^9 = 2^9.cis\left(9.\dfrac{\pi}{4}\right) = 512.cis\dfrac{\pi}{4}$

Divisão na Forma Polar

Considere dois números complexos z_1 e z_2 e suas respectivas formas polares

$$\rho_1(\cos\alpha_1 + i.\text{sen}\alpha_1)$$

$$\rho_2(\cos\alpha_2 + i.\text{sen}\alpha_2)$$

Dividindo $\dfrac{z_1}{z_2}$, temos;

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1.z_2^{-1} \\
&= \rho_1(\cos\alpha_1 + i.\text{sen}\alpha_1).\rho_2^{-1}(\cos(-\alpha_2) + i.\text{sen}(-\alpha_2)) \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2}.[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i.\text{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)]
\end{aligned}$$

Exemplo

Sendo $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w = 1 + i\sqrt{3}$, calcular $\dfrac{z^7}{w^{12}}$

Módulos: $|z| = 2$ e $|w| = 2$.

Argumentos: $\text{tg}\alpha = 1$, $\text{tg}\beta = \sqrt{3}$, com ambos os complexos no primeiro quadrante. Portanto, $\alpha = \dfrac{\pi}{4} rad = 45^0$ e $\beta = \dfrac{\pi}{3} rad = 60^0$.

Forma Polar: $z = 2.cis\dfrac{\pi}{4}$, $w = 2.cis\dfrac{\pi}{3}$

Potências: $z^7 = 2^7.cis\left(7.\dfrac{\pi}{4}\right)$ e $w = 2^{12}.cis\left(12.\dfrac{\pi}{3}\right) = 2^{12}.cis(0)$

Quociente: $\dfrac{z^7}{w^{12}} = 2^{7-12}.cis\left(\dfrac{7\pi}{4} - 0\right) = \dfrac{1}{32}.cis\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$