LISTA 01 - 2019.2 - Matemática Básica III

1. Considere os números complexos $z_1 = (1,2)$, $z_2 = (-2,3)$ e $z_3 = (1,-1)$. Calcule

   (a) $z_1 + z_2 + z_3$

   (b) $z_1.z_2 + z_2.z_3 + z_3.z_1$

   (c) $z_1.z_2.z_3$

   (d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

   (e) $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_3} + \dfrac{z_3}{z_1}$

   (f) $\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$

2. Resolva as seguintes equações:

   (a) $z + (-5,7) = (2,-1)$

   (b) $(2,3) + z = (-5,-1)$

   (c) $z.(2,3) = (4,5)$

   (d) $\dfrac{z}{(-1,3)} = (3,2)$

3. Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complexos. Verifique a validade de

$$\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_n}$$

$$\overline{z_1.z_2.\cdots.z_n} = \overline{z_1}.\overline{z_2}.\cdots.\overline{z_n}$$

4. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Prove que $z.\overline{w} + \overline{z}.w$ é um número real.

5. Calcule

   (a) $\dfrac{5+5i}{3-4i} + \dfrac{20}{4+3i}$

   (b) $\dfrac{3+7i}{2+3i} + \dfrac{5-8i}{2-3i}$

   (c) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{8}$

   (d) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{6} + \left(\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^{6}$

6. (Potências de i) Determine:

   (a) i^2, i^3, i^4, i^5

   (b) $i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2}, i^{4n+3}$, onde n é um inteiro positivo.

   (c) $i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, i^{-4}, i^{-5}$

   (d) $i^{-4n}, i^{-(4n+1)}, i^{-(4n+2)}, i^{-(4n+3)}$, onde n é um inteiro positivo.

7. Calcule:

   (a) $i^{105} + i^{23} + i^{20} - i^{34}$

   (b) $i^{2000} + i^{1999} + i^{201} + i^{82} + i^{47}$

   (c) $i.i^2.i^3.\cdots.i^{2000}$

   (d) $1 + 2.i^4 + 3.i^8 + ... + n.i^{36}$

8. Encontre todos os números complexos $z = a + bi$ de modo que

   (a) $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

   (b) $z^3 = \overline{z}$

9. Demonstre os seguintes fatos:

   (a) $|z| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Mais ainda: $|z| = 0$ se, e somente se $z = 0$.

   (b) $z.\overline{z} = |z|^2$

   (c) $|z.w| = |z|.|w|$ e $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

(d) $|z+w|^2 = |z|^2 + 2Re(\overline{z}.w) + |w|^2$

(e) (Desiguldade Triangular) $|z+w| \leq |z| + |w|$

(f) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

10. Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complexos. Verifique a validade de

$$\overline{|z_1.z_2.\cdots.z_n|} = \overline{|z_1|}.\overline{|z_2|}.\cdots.\overline{|z_n|}$$

$$\overline{|z_1 + z_2 + \ldots + z_n|} \leq \overline{|z_1|} + \overline{|z_2|} + \ldots + \overline{|z_n|}$$

11. É verdade que $|z^n| = |z|^n$?

12. Mostre que $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

13. Prove que se $|z| = |w| = 1$ e $z.w \neq -1$, então $\dfrac{z+w}{1+zw}$ é um número real.

14. Resolva as equações

(a) $|z| - 2z = 3 - 4i$

(b) $|z| + z = 4 + 4i$