Números Complexos

Matemática Básica III - 2019.2

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Prof. Márcio Nascimento

24 de setembro de 2019

Sumário

No encontro anterior

- Definimos adição e subtração:

$$(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)$$

- Multiplicação:

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

- Vimos que

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

- Divisão:

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2} \right)$$

Identidade de Euler

Seja m e n dois números naturais tais que cada um deles pode ser escrito como a soma de dois quadrados perfeitos. Então, $m.n$ pode ser escrito como a soma de dois quadrados perfeitos.

Prova: Sejam $m = a^2 + b^2$ e $n = c^2 + d^2$. Então

$$\begin{aligned} m.n &= (a^2 + b^2).(c^2 + d^2) \\ &= (a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2) \\ &= (ac)^2 + 2acbd + (bd)^2 + (ad)^2 - 2adbc + (bc)^2 \\ &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Lei do Cancelamento

Se $(a, b).(c, d) = (0, 0)$, então $(a, b) = (0, 0)$ ou $(c, d) = (0, 0)$.

Prova: Queremos mostrar que $(ac - bd, ad + bc) = (0, 0)$ isto é, que $ac - bd = 0$ e que $ad + bc = 0$. Isso equivale dizer que:

$$\begin{aligned} 0 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= (a^2 + b^2).(c^2 + d^2) \end{aligned}$$

Isto é,

$$a^2 + b^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad c^2 + d^2 = 0$$

E, portanto

$$\underbrace{a = b = 0}_{(a,b)=(0,0)} \qquad \text{ou} \qquad \underbrace{c = d = 0}_{(c,d)=(0,0)}$$

■

Temos, ainda, uma propriedade envolvendo a Adição e a Multiplicação:

Distributividade: Sejam $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$. Então

$$(a, b).[(c, d) + (e, f)] = (a, b).(c, d) + (a, b).(e, f)$$

Multiplicação por escalar

Sejam $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e k um número real. Definimos o produto do par ordenado (a, b) pelo escalar k da seguinte forma:

$$k.(a, b) = (k.a, k.b)$$

Exemplos

(i) $3.(-5, 4) = (3.(-5), 3.4) = (-15, 12)$

(ii) $(24, 16) = (8.3, 8.2) = 8.(3, 2)$

Embora não seja uma operação entre pares ordenados, a multiplicação por escalar tem as seguintes propriedades:

1. **Distributividade do par ordenado:**
   $(k_1 + k_2).(a, b) = k_1.(a, b) + k_2.(a, b)$
2. **Distributividade do escalar:**
   $k[(a, b) + (c, d)] = k(a, b) + k(c, d)$
3. **Associatividade:**
   $k_1.k_2.(a, b) = k_1.(k_2(a, b)) = k_2.(k_1.(a, b))$

Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado pelos pares ordenados cuja ordenada é nula:

$$\Re = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y = 0\}$$

Se $(a, 0)$ e $(b, 0)$ são dois elementos quaisquer em $\Re$, então

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0).(b, 0) = (a.b - 0.0, a.0 + 0.b) = (a.b, 0)$$

Isto é, o conjunto $\Re$ é **fechado** para adição e multiplicação. Além disso, operar estes tipos de pares ordenados, corresponde a operar apenas as abscissas.

Assim, podemos nos referir aos pares ordenados do tipo $(x, 0)$ simplesmente por x.

Exemplos $(1, 0) = 1, \ (-5, 0) = -5, \ (\sqrt{7}, 0) = \sqrt{7}, \ (0, 0) = 0$

Agora vamos considerar o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado pelos pares ordenados com abscissa nula, isto é, o conjunto

$$\Im = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x = 0\}$$

Novamente, considere dois pares ordenados deste conjunto, digamos, (a, b) e (c, d):

$$(0, a) + (0, b) = (0 + 0, a + b) = (0, a + b)$$

$$(0, a).(0, b) = (0.0 - a.b, 0.b + a.0) = (-ab, 0)$$

Veja que este é conjunto é **fechado para a adição**, mas não para a multiplicação.

Mais: o produto de dois elementos de $\Im$ pertence à $\Re$.

Forma Algébrica de um par ordenado

Denotemos o par ordenado $(0,1)$ por i.

Se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, então podemos escrever:

$$\begin{aligned}(a,b) &= (a,0)+(0,b)\\ &= (a,0)+b.(0,1)\\ &= a+b.i \longleftarrow \textbf{Forma Algébrica}\end{aligned}$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} i^2 &= (0,1).(0,1)\\ &= (0.0-1.1,0.1+1.0)\\ &= (-1,0)\\ &= -1\end{aligned}$$

Conjunto dos Números Complexos - $\mathbb{C}$

Denotaremos por $\mathbb{C}$ e chamaremos de **conjunto dos números complexos** o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido das operações adição e multiplicação vistas anteriormnte.

Forma Algébrica

Qualquer elemento de $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito na forma $a + bi$ onde

- a é chamado parte real de z;
- b é chamado parte imaginária de z;
- i é a unidade imaginária.

Operações na Forma Algébrica

Adição

$$(a+bi)+(c+di) = (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) = (a+c)+(b+d)i$$

Multiplicação

$$(a+bi)(c+di) = (a,b).(c,d) = (ac-bd, ad+bc) = \\ (ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$(a+bi)(c+di)$$

$$= ac+adi+bci+bdi^2 = ac+(ad+bc)i-bd = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Exemplo

$(2+3i)(5-4i)$

$$(2+3i)(5-4i)$$

$$= 2.5 + 2.(-4i) + (3i).5 + (3i).(-4i)$$

$$= 10 - 8i + 15i - 12i^2$$

$$= 10 + 7i + 12$$

$$= \boxed{22 + 7i}$$

Conjugado de um número complexo

Conjugado de um número complexo

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, o seu conjugado é definido por

$$\overline{z} = a - bi$$

Exemplos Se $z = 3 + 2i$ então $\overline{z} = 3 - 2i$

Se $z = 3 - 2i$, então $\overline{z} = 3 + 2i$

Se $z = -4 + 2i$, então $\overline{z} = -4 - 2i$

Se $z = 7i$, então $\overline{z} = -7i$

Se $z = 4$, então $\overline{z} = 4$.

Conjugado de um número complexo

O que ocorre ao multiplicarmos um número complexo z pelo seu conjugado $\overline{z}$?

$$\begin{aligned} z.\overline{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2-(bi)^2 \\ &= a^2-b^2i^2 \\ &= a^2-b^2(-1) \\ &= \boxed{a^2+b^2} \end{aligned}$$

Ou seja, o produto $z.\overline{z}$ é um **número real**!

Divisão

Vamos usar o conjugado para efetuar a divisão entre dois números complexos.

Exemplo

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{1-2i} &= \frac{2+3i}{1-2i}.\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{2+4i+3i-6}{1^2+2^2}\\ &= \frac{-4+7i}{5}\\ &= -\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i\end{aligned}$$

Em geral:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}.\frac{c-di}{c-di} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

Exemplo

Inverso Multiplicativo

- Usando a forma algébrica, qual o inverso multiplicativo de $z = 3 - 2i$?
- Resposta: $\boxed{\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i}$

Propriedades do Conjugado

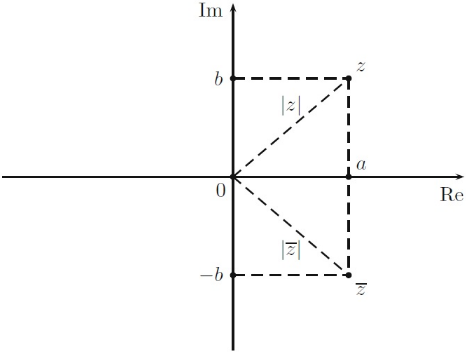
Sejam $z, w \in \mathbb{C}$

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow Im(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$
- $(\overline{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

Módulo de um número complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, o seu módulo é definido por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Exemplo

Qual o módulo do número complexo $z = 2 - 4i$?

Resposta: $|z| = \sqrt{20}$

Obs: Veja que, em geral, $|z|^2 = a^2 + b^2 = z.\overline{z}$

Exercícios

1. Se z e w são números complexos de módulo unitário e tais que $z.w \neq -1$, mostre que $\dfrac{z+w}{1+zw}$ é um real puro.
2. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, o número real $|z-w|$ equivale a distância Euclidiana entre z e w no plano cartesiano.