ÁLGEBRA MATRICIAL - 2019.1 - 3ª AP - 22/08/2019

Prova comentada

Coloque aqui a data de seu nascimento:

a	b	c	d	e	f	g	h
0	3	0	9	1	9	7	8

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & -1 & 2 \\ -2 & a & -2 & -3 \\ 4 & 1 & b & -1 \\ 2 & -1 & a & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & -1 & 2 \\ \hline -2 & 0 & -2 & -3 \\ \hline 4 & 1 & 3 & -1 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Nas questões a seguir, a, b, c, d, e, f **e** A **se referem a aos dados acima.**

---

1. (3,0) Usando eliminação gaussiana, calcule o determinante de A.

   Vamos triangularizar a matriz A usando operações elementares sobre as linhas.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{6} & -4 & 1 \\ 0 & -11 & 7 & -9 \\ 0 & -7 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 6L_3 + 11L_2 \\ \leftarrow 6L_4 + 7L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -43 \\ 0 & 0 & -16 & -11 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow L_4 - 8L_3 \end{array}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 333 \end{bmatrix}$$

   Logo,

$$detA = \frac{detT}{6.6} = \frac{1.6.(-2).333}{6.6} = -111$$

2. (2,0) Seja $AX = B$ a equação de um sistema linear com quatro incógnitas. Sem resolver o sistema, explique **QUANTAS** soluções ele possui.

   Sendo A a matriz dos coeficientes do sistema, trata-se de um sistema com quatro incógnitas e quatro equações. Vimos no item (a) que $detA \neq 0$, isto é, a matriz A tem posto igual a 4 (posto máximo). Logo, o sistema $AX = B$ possui uma única solução, independente de B.

3. (3,0) Quais os determinantes de A^T, A^{-1} e $-A$?

   Lembre das seguintes propriedades dos determinantes:

$$detA^T = detA, \qquad \det A^{-1} = \frac{1}{detA}, \qquad det(k.A) = k^n.detA$$

   Daí,

$$detA^T = -111, \qquad \det A^{-1} = \frac{-1}{111}, \qquad det(-A) = (-1)^4.(-111) = -111$$

4. (2,0) Calcule $\dfrac{\det(2A) - (e+f+g+h).\det(A.A^T)}{(c+d)+\det(A^{(a+c)})}$

Vejamos cada parcela separadamente:

$$det(2A) = 2^4.detA = -1776$$

$$e+f+g+h = 1+9+7+8 = 25$$
$$det(A.A^T) = detA.detA^T = (-111).(-111) = 12321$$
$$c+d = 0+9 = 9$$
$$a+c = 0$$
$$A^{a+c} = A^0 = I \therefore detA^{a+c} = 1$$

Desta forma,

$$\frac{\det(2A) - (e+f+g+h).\det(A.A^T)}{(c+d)+\det(A^{(a+c)})} = \frac{-1776-308025}{9+1} = -30980,1$$

Questões opcionais

5. (2,0) Qual a inversa da matriz A?

Aplicando o método de Gauss-Jordan, encontraremos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/37 & 5/37 & 13/111 & 40/111 \\ 8/37 & 1/37 & 10/111 & -29/111 \\ -6/37 & -10/37 & 11/111 & -43/111 \\ 2/37 & -9/37 & -16/111 & 2/111 \end{bmatrix}$$

6. (2,0) O produto da matriz A por uma matriz M resulta em $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine M.

Se $A.M = B$, onde $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, então

$$A^{-1}.(AM) = A^{-1}.B \Longrightarrow (A^{-1}.A).M = A^{-1}.B \Longrightarrow M = A^{-1}.B$$

Logo,

$$M = \begin{bmatrix} 3/37 & 5/37 & 13/111 & 40/111 \\ 8/37 & 1/37 & 10/111 & -29/111 \\ -6/37 & -10/37 & 11/111 & -43/111 \\ 2/37 & -9/37 & -16/111 & 2/111 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 116/111 & 30/37 & 106/111 & 16/37 \\ -26/37 & 6/37 & -38/111 & -19/37 \\ -184/111 & -23/37 & -64/111 & -32/37 \\ -25/111 & -17/37 & -28/111 & -14/37 \end{bmatrix}$$