2ª Avaliação Parcial - 2019.1 - Álgebra Matricial

1. Uma empresa que produz jogos de futebol para vídeo game define três tipos de habilidades para os jogadores. O quadro ao lado mostra a pontuação atribuída a 5 desses jogadores.

Habilidades →	H_1	H_2	H_3
Zlatan	9,50	8,50	7,50
Cristiano	9,00	9,00	9,00
Lionel	10,00	9,00	10,00
Thierry	8,00	8,00	7,50
Zinedine	9,00	10,00	9,00

(a) (1,0) Para os usuários que comprarem a versão básica do jogo (mais barata) as habilidades dos jogadores são reduzidas em 15%. Transforme esse quadro em uma matriz e, utilizando operações válidas nesse conjunto, apresente o quadro de Habilidades para a versão básica do jogo. Explique que operação você usou e como usou.

Para diminuir todos os valores do quadro em 15%, basta transformar os dados do quadro em uma matriz e **multiplicá-la pelo escalar** $\alpha = 0,85$:

$$Q = \begin{bmatrix} 9,50 & 8,50 & 7,50 \\ 10,00 & 9,00 & 10,00 \\ 10,00 & 9,00 & 10,00 \\ 8,00 & 8,00 & 7,50 \\ 9,00 & 10,00 & 9,00 \end{bmatrix} \Longrightarrow \quad Q_1 = 0,85.Q = \begin{bmatrix} 8,075 & 7,225 & 6,375 \\ 8,500 & 7,650 & 8,500 \\ 8,500 & 7,650 & 8,500 \\ 6,800 & 6,800 & 6,375 \\ 7,650 & 8,500 & 7,650 \end{bmatrix}$$

(b) (2,0) Na versão intermediária do jogo, as habilidades H_1, H_2 e H_3 são reduzidas, respectivamente em 15%, 10% e 5%. Usando o conceito de produto de matrizes (quadro de habilidades × redução nas habilidades), represente o quadro de habilidades para esta versão do jogo.

Neste caso, os dados do quadro Q não diminuem todos na mesma proporção. Cada coluna tem sua própria redução.

Transformando o quadro Q em uma matriz, esta terá ordem 5×3. Precisamos introduzir uma matriz D de modo que através de um produto de matrizes ($Q.D$), obtenhamos um novo quadro, isto é, uma nova matriz também de ordem 5×3 ($Q.D = Q_2$). Logo, a ordem da matriz D necessariamente será 3×3.

Para que se altere a primeira coluna de Q, reduzindo seus valores em 15%, então sempre que fizermos o produto de cada linha de Q pela primeira coluna de D, devemos alterar apenas o primeiro elemento da linha:

$$Q.D = \begin{bmatrix} \boxed{9,50} & \boxed{8,50} & \boxed{7,50} \\ 10,00 & 9,00 & 10,00 \\ 10,00 & 9,00 & 10,00 \\ 8,00 & 8,00 & 7,50 \\ 9,00 & 10,00 & 9,00 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{0,85} & \star & \star \\ \boxed{0} & \star & \star \\ \boxed{0} & \star & \star \end{bmatrix}$$

Observe que no produto interno entre a linha 1 de Q e a coluna 1 de D - que gera o elemento q_{11} no novo quadro (Q_2) - obtém-se $9,50 \times 0,85 = 8,075$.

Seguindo mesmo raciocínio, para alterar apenas os valores da coluna 2 de Q - que devem aparecer na coluna 2 do novo quadro (Q_2) - então a segunda coluna de D deve ter a seguinta forma:

$$Q.D = \begin{bmatrix} \boxed{9,50} & \boxed{8,50} & \boxed{7,50} \\ 10,00 & 9,00 & 10,00 \\ 10,00 & 9,00 & 10,00 \\ 8,00 & 8,00 & 7,50 \\ 9,00 & 10,00 & 9,00 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0,85 & \boxed{0} & \star \\ 0 & \boxed{0,90} & \star \\ 0 & \boxed{0} & \star \end{bmatrix}$$

e, por fim, a terceira coluna de D deve ter o seguinte formato

$$Q.D = \begin{bmatrix} \boxed{9{,}50} & \boxed{8{,}50} & \boxed{7{,}50} \\ 10,00 & 9,00 & 10,00 \\ 10,00 & 9,00 & 10,00 \\ 8,00 & 8,00 & 7,50 \\ 9,00 & 10,00 & 9,00 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0,85 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0,90 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{0{,}95} \end{bmatrix}$$

Logo

$$Q_2 = Q_1.D = \begin{bmatrix} \boxed{9{,}50} & \boxed{8{,}50} & \boxed{7{,}50} \\ 10,00 & 9,00 & 10,00 \\ 10,00 & 9,00 & 10,00 \\ 8,00 & 8,00 & 7,50 \\ 9,00 & 10,00 & 9,00 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0,85 & 0 & 0 \\ 0 & 0,90 & 0 \\ 0 & 0 & 0,95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,075 & 7,650 & 7,125 \\ 8,500 & 8,100 & 9,500 \\ 8,500 & 8,100 & 9,500 \\ 6,800 & 7,200 & 7,125 \\ 7,650 & 9,000 & 8,550 \end{bmatrix}$$

2. Para trocar mensagens de maneira secreta, Eduarda e Vanessa utilizam o conceito de inversão de matrizes (**pelo Método de Gauss-Jordan!**). Elas usam como chave a matriz K ao lado (conhecida por ambas as amigas).

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Para enviar à Vanessa uma mensagem com até 16 caracteres (incluindo espaços), Eduarda associa a cada letra da mensagem um número de acordo com a ordem alfabética (A=1, B=2, C=3, ..., Z=26). Para o espaço entre palavras, é usado o número 0 (zero). A mensagem (já transformada em números) é colocada em uma matriz $M_{4\times4}$ iniciando na posição 11 e preenchendo linha após linha, até se chegar a posição 44.

Em seguida, Eduarda realiza o produto $K.M$ e envia a Vanessa. Essa é a mensagem codificada:

$$K.M = \begin{bmatrix} 41 & 29 & 24 & -6 \\ 11 & 5 & 17 & 43 \\ 85 & 13 & 63 & 40 \\ 28 & 70 & 39 & 21 \end{bmatrix}$$

(a) (2,0) Como Vanessa pode decodificar (descobrir) a mensagem enviada por Eduarda?

Não conhecemos a matriz M. Mas sabemos quem é K e o produto KM. Logo, se K possuir inversa, temos

$$K^{-1}.(KM) = (K^{-1}.K).M = I.M = M$$

ou seja, determinaremos M fazendo o produto $K^{-1}.(KM)$.

(b) (5,0) Qual a mensagem enviada por Eduarda?

Para descobrir a mensagem enviada por Eduarda, precisamos descobrir, de início, se K é não singular. Para tanto, vamos usar o método de Gauss-Jordan e verificar se é possível transformar K em I por meio de operações elementares:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \\ \leftarrow 2L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 3L_1 + L_2 \\ \\ \leftarrow 3L_3 - 2L_2 \\ \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 6 & 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -5 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 7L_1 + 2L_3 \\ \leftarrow 7L_2 + 2L_3 \\ \\ \leftarrow 7L_4 + 4L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 42 & 0 & 0 & 30 & 18 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 9 & -3 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -5 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & -34 & -30 & 12 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1/6 \\ \leftarrow L_2/3 \\ \\ \leftarrow L_4/2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 7 & 0 & 0 & 5 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -5 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -17 & -15 & 6 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 12L_1 + 5L_4 \\ \leftarrow 4L_2 + L_4 \\ \leftarrow 12L_3 + L_4 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 84 & 0 & 0 & 0 & -49 & -63 & 42 & 35 \\ 0 & 28 & 0 & 0 & -21 & -7 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & -84 & 0 & -77 & -63 & 42 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -17 & -15 & 6 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1/84 \\ \leftarrow L_2/28 \\ \leftarrow -L_3/84 \\ \leftarrow -L_3/12 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -7/12 & -3/4 & 1/2 & 5/12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/4 & -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11/12 & 3/4 & -1/2 & -1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 17/12 & 5/4 & -1/2 & -7/12 \end{array}\right]$$

Logo, a inversa de K é

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} -7/12 & -3/4 & 1/2 & 5/12 \\ -3/4 & -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 11/12 & 3/4 & -1/2 & -1/12 \\ 17/12 & 5/4 & -1/2 & -7/12 \end{bmatrix}$$

E a matriz que leva a mensagem de Eduarda é

$$K^{-1}.(KM) = \begin{bmatrix} -7/12 & -3/4 & 1/2 & 5/12 \\ -3/4 & -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 11/12 & 3/4 & -1/2 & -1/12 \\ 17/12 & 5/4 & -1/2 & -7/12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 41 & 29 & 24 & -6 \\ 11 & 5 & 17 & 43 \\ 85 & 13 & 63 & 40 \\ 28 & 70 & 39 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 15 & 21 & 0 \\ 16 & 1 & 19 & 19 \\ 1 & 18 & 0 & 5 \\ 13 & 0 & 1 & 13 \end{bmatrix}$$

Fazendo a conversão para as letras do alfabeto de acordo com a identificação

$$A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, ..., Z = 26$$

temos

$$KM = \begin{bmatrix} V & O & U & \\ P & A & S & S \\ A & R & & E \\ M & & A & M \end{bmatrix}$$

Portanto, a mensagem é:

"VOU PASSAR EM AM"

■

Questões Retrô

3. (2,0) Usando Gauss-Jordan, resolva o sistema $Q^T.X = B$ onde Q^T é a matriz transposta da matriz que representa o quadro da questão 1 e $B^T = [45,5 \quad 44,5 \quad 43]$.

Sendo

$$Q = \begin{bmatrix} 9,50 & 8,50 & 7,50 \\ 10,00 & 9,00 & 10,00 \\ 10,00 & 9,00 & 10,00 \\ 8,00 & 8,00 & 7,50 \\ 9,00 & 10,00 & 9,00 \end{bmatrix}$$

temos que

$$Q^T = \begin{bmatrix} 9,50 & 10,00 & 10,00 & 8,00 & 9,00 \\ 8,50 & 9,00 & 9,00 & 8,00 & 10,00 \\ 7,50 & 10,00 & 100,00 & 7,50 & 9,00 \end{bmatrix}$$

O **sistema** $Q^T.X = B$ corresponde, então, a:

$$Q^T = \begin{bmatrix} 9,50 & 10,00 & 10,00 & 8,00 & 9,00 \\ 8,50 & 9,00 & 9,00 & 8,00 & 10,00 \\ 7,50 & 10,00 & 100,00 & 7,50 & 9,00 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45,5 \\ 44,5 \\ 43 \end{bmatrix}$$

Sua matriz aumentada é:

$$\begin{bmatrix} 9,50 & 10,00 & 10,00 & 8,00 & 9,00 & | & 45,5 \\ 8,50 & 9,00 & 9,00 & 8,00 & 10,00 & | & 44,5 \\ 7,50 & 10,00 & 10,00 & 7,50 & 9,00 & | & 43 \end{bmatrix}$$

Aplicando Gauss-Jordan, obteremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-38}{65} & | & \frac{9}{65} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{-27}{65} & | & \frac{56}{65} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{152}{65} & | & \frac{289}{65} \end{bmatrix}$$

Assim, a solução geral do sistema é:

$$X = \left(\frac{9 + 38\beta}{65}, \frac{56 + \alpha + 27\beta}{65}, \alpha, \frac{289 - 152\beta}{65}, \beta \right)$$

■

4. (2,0) Usando Gauss-Jordan, resolva o sistema $K.X = B$ onde K é a matriz da questão 2 e $B^T = [1 \quad 2 \quad 3 \quad -2]$.

$$K.X = B \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz aumentada é:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & | & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & | & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

cuja forma escalonada reduzida é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{-17}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{13}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{43}{12} \end{bmatrix}$$

Assim, a solução do sistema é

$$X = \left(\frac{-17}{12}, \frac{-1}{4}, \frac{13}{12}, \frac{43}{12}\right)$$

■