

1ª Avaliação Parcial - Álgebra Matricial - 2019.1

As Suzanas da turma abriram uma empresa, a **Suzanas Home Service** que realiza reparos do lar. Inicialmente elas oferecem conserto de máquina de lavar, manutenção de jardim e limpeza de caixa d'água. Por cada serviço, independente da complexidade e/ou tamanho, a empresa cobra um valor fixo para cada tipo de serviço.

1. (4,0) No primeiro mês de funcionamento (fevereiro de 2019), a empresa executou 2 consertos de máquina de lavar, 1 manutenção de jardim e 3 limpezas de caixa d'água. O total arrecadado foi de R\$ 520,00. Em março de 2019, a quantidade de serviço aumentou: foram 5 consertos de máquina de lavar, 4 manutenções de jardim e 12 limpezas de caixa d'água, que gerou um total arrecadado de R\$ 1.690,00. Já em abril, com a empresa se consolidando, elas arrecadaram R\$ 2.900,00 com o conserto de 12 máquinas de lavar, manutenção de 10 jardins e lavagens de 12 caixas d'água. **Usando sistemas lineares e através do método de Gauss-Jordan, determine o valor cobrado por cada um dos serviços executados pela empresa das Suzanas.**

Solução: Inicialmente, vamos estabelecer a nomenclatura para o que desejamos encontrar (as incógnitas):

x : Valor cobrado pelo conserto de máquina de lavar;

y : valor cobrado pela manutenção de jardim;

z : valor cobrado pela limpeza de caixa d'água.

Sendo assim, em cada mês, o valor arrecadado será dado por uma equação linear:

$$\text{Fevereiro: } 2x + y + 3z = 520;$$

$$\text{Março: } 5x + 4y + 12z = 1690;$$

$$\text{Abril: } 12x + 10y + 12z = 2900.$$

Portanto, temos um sistema linear com três equações e três variáveis. Escrevendo sua matriz ampliada, temos:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 520 \\ 5 & 4 & 12 & 1690 \\ 12 & 10 & 12 & 2900 \end{array} \right]$$

Aplicando Gauss-Jordan a esta matriz, obtemos a seguinte Forma Escalonada Reduzida

$$[E_A|\Delta] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 130 \\ 0 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 70 \end{array} \right]$$

Logo, a *solução do sistema* é $X = (130, 50, 70)$ e a **solução do problema** é:

O conserto da máquina de lavar custa R\$ 130,00;

A manutenção de jardim custa R\$ 50,00

A limpeza de uma caixa d'água custa R\$ 70,00.



2. (6,0) Com a empresa indo muito bem, as Suzanas resolveram ofertar mais 2 serviços: passeio com cachorro e lavagem de carro. Resolveram, também, mudar os preços cobrados pelos outros três serviços já ofertados. Para definir o preço cobrado por cada serviço, elas fizeram uma projeção considerando a quantidade de serviços que elas podem executar e o quanto elas esperam arrecadar para os meses de agosto, setembro e outubro de 2019, conforme quadro abaixo:

Mês	Conserto	Jardim	Caixa D'água	Passeio	Carro	Arrecadar
Agosto	12	12	10	5	5	R\$ 3.500,00
Setembro	12	12	12	10	8	R\$ 3.800,00
Outubro	12	12	15	12	15	R\$ 4.300,00

(a) Modele esta situação por meio de um sistema linear e encontre sua solução geral usando o método de Gauss-Jordan.

Solução: Estabelecendo a nomenclatura para o que desejamos encontrar (as incógnitas):

x : Valor cobrado pelo conserto de máquina de lavar;

y : valor cobrado pela manutenção de jardim;

z : valor cobrado pela limpeza de caixa d'água;

w : valor cobrado pelo passeio com cachorro;

t : valor cobrado pela lavagem de carro.

O que a empresa espera arrecadar em cada mês será dado por uma equação linear:

$$\text{Agosto: } 12x + 12y + 10z + 5w + 5t = 3500;$$

$$\text{Setembro: } 12x + 12y + 12z + 10w + 8t = 3800;$$

$$\text{Outubro: } 12x + 12y + 15z + 12w + 15t = 4300.$$

Portanto, temos um sistema linear com três equações e cinco variáveis, cuja matriz ampliada é:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 12 & 12 & 10 & 5 & 5 & 3500 \\ 12 & 12 & 12 & 10 & 8 & 3800 \\ 12 & 12 & 15 & 12 & 15 & 4300 \end{array} \right]$$

Aplicando Gauss-Jordan, temos os seguintes passos:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{12} & 12 & 10 & 5 & 5 & 3500 \\ 12 & 12 & 12 & 10 & 8 & 3800 \\ 12 & 12 & 15 & 12 & 15 & 4300 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 - L_1 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

Observe que o próximo pivot era esperado na posição {22} (segunda linha e segunda coluna). Porém, ali aparece um zero. A saída seria uma permuta com a terceira linha, mas isso não modificaria a situação. Portanto, o pivot estará na terceira coluna.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 12 & 12 & 10 & 5 & 5 & 3500 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 5 & 3 & 300 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 10 & 800 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - 5L_2 \\ \leftarrow 2L_3 - 5L_1 \end{array}$$

Façamos a simplificação na linha 1 antes de prosseguirmos:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 12 & 12 & 0 & -20 & -10 & 2000 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 5 & 100 \end{array} \right] \leftarrow L_1/2$$

Agora passamos ao pivot da terceira linha:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 6 & 0 & -10 & -5 & 1000 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 5 & 100 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow 11L_1 - 10L_3 \\ \leftarrow 11L_2 + 5L_3 \end{array}$$

Esgotadas as possibilidades de pivot, só nos resta fazer as operações elementares para que em suas respectivas posições, tenhamos 1:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 66 & 66 & 0 & 0 & -105 & 10.000 \\ 0 & 0 & 22 & 0 & 58 & 3800 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 5 & 100 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1/66 \\ \leftarrow L_2/22 \\ \leftarrow -L_3/11 \end{array}$$

E chegamos à Forma Escalonada Reduzida, que tem como variáveis livres as que correspondem às colunas 2 e 5:

$$[E_A | \Delta] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -35/22 & 5000/33 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 29/11 & 1900/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5/11 & -100/11 \end{array} \right]$$

Sendo duas as variáveis livres, serão dois os parâmetros na solução geral. E, neste caso, suas posições (as dos parâmetros) correspondem a posição das colunas 2 e 5. Daí, a solução geral do sistema é:

$$X = \left(\frac{5000}{33} - \alpha + \frac{35}{22}\beta, \alpha, \frac{1900}{11} - \frac{29}{11}\beta, -\frac{100}{11} + \frac{5}{11}\beta, \beta \right)$$

■

(b) Se as Suzanas decidirem cobrar R\$ 50,00 pelo serviço de manutenção do jardim e R\$ 88,00 pela lavagem de automóvel, elas conseguem alcançar a meta (arrecadação) desejada? Justifique.

Solução: Observe no item (a) que as variáveis livres correspondem às variáveis y e t , ou seja, aos serviços de manutenção de jardim e lavagem de automóvel, respectivamente. Cobrar R\$ 50,00 e R\$ 88,00 por tais serviços, corresponde a atribuir estes valores aos parâmetros α e β , isto é:

$$\alpha = 50 \quad \text{e} \quad \beta = 88$$

Ora, mas para tais valores, obteremos a seguinte solução particular:

$$X = (241,52 ; 50 ; -59,27 ; 30,91 ; 88)$$

Veja que o valor a ser cobrado pela lavagem de caixa d'água (variável z) não é viável (valor negativo). Portanto, esta escolha não deve ser feita pela empresa.

■

(c) Apresente uma outra sugestão (diferente da do item b) de valor a ser cobrado para cada um dos cinco serviços executados, de modo que as Suzanas alcancem a meta traçada na projeção (quadro).

Solução: Voltando a solução geral,

$$X = \left(\frac{5000}{33} - \alpha + \frac{35}{22}\beta, \alpha, \frac{1900}{11} - \frac{29}{11}\beta, -\frac{100}{11} + \frac{5}{11}\beta, \beta \right)$$

e pelo que vimos no item (b), precisamos nos certificar que o valor cobrado por cada serviço seja positivo!

Portanto, inicialmente, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Observando a possibilidade de valores para a limpeza da caixa d'água (z) e passeio com cachorro (w), temos:

$$z: \frac{1900}{11} - \frac{29}{11}\beta > 0 \Rightarrow \frac{29}{11}\beta < \frac{1900}{11} \Rightarrow 29\beta < 1900 \Rightarrow \beta < 66,52$$

$$w: -\frac{100}{11} + \frac{5}{11}\beta > 0 \Rightarrow \frac{5}{11}\beta > \frac{1900}{11} \Rightarrow 5\beta > 11 \Rightarrow \beta > 20$$

Daí,

$$20 < \beta < 66,52$$

ou seja, devemos escolher o valor de β (lavagem de carro) entre R\$ 20,00 e R\$ 66,52. Agora, analisando o valor a ser cobrado pelo conserto da máquina de lavar (x), temos:

$$\frac{5000}{33} - \alpha + \frac{35}{22}\beta > 0 \Rightarrow \alpha < \frac{5000}{33} + \frac{35}{22}\beta$$

Pelo que foi visto acima, $\beta < 66,52$. Portanto,

$$\alpha < \frac{5000}{33} + \frac{35}{22}\beta < \frac{5000}{33} + \frac{35}{22}.66,52 = 257,34$$

ou seja, o valor de α (manutenção de jardim) deve ser de, no máximo, R\$ 257,34.

Isso significa que definindo a cobrança pela manutenção de jardim em até R\$ 257,34 e a lavagem de carro entre R\$ 20,00 e R\$66,52, a empresa alcança a meta desejada. Então, definamos, por exemplo, R\$ 40,00 pela manutenção de jardim e R\$ 30,00 pela lavagem de carro. Substituindo $\alpha = 40$ e $\beta = 30$ na solução geral, obtemos:

$$X = (159,21 ; 40 ; 93,53 ; 4,41 ; 30)$$

isto é, R\$ 159,21 pelo conserto de máquina de lavar, R\$93,53 pela limpeza de caixa d'água e R\$ 4,41 pelo passeio com cachorro.

■