ÁLGEBRA MATRICIAL - 2018.2 - 3ª AVALIAÇÃO PARCIAL - 01/04/2019

Nome: PROVA COMENTADA

Coloque aqui a data de seu nascimento:

a	b	c	d	e	f	g	h
3	1	1	2	1	9	9	8

OBS: Aqui foi colocada uma data aleatória. Cada estudante tem sua própria data de nascimento.

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} e & 2e & b & c \\ a & d & f & 3d \\ 4 & h & -3b & (a+b) \\ (b-d) & f & g & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 6 \\ 4 & 8 & -3 & 4 \\ -1 & 9 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Todos esses dados serão usados ao longo das questões a seguir.

---

1. (3,0) Determine a inversa da matriz A.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 9 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 9 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 10 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ \\ \\ \leftarrow 4L_4 + 11L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 8 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 106 & 45 & -29 & 11 & 0 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 7L_1 + 8L_3 \\ \leftarrow 7L_2 + 6L_3 \\ \\ \leftarrow 7L_4 + 106L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 14 & 0 & 0 & 35 & -39 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & -28 & 0 & 21 & -45 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 315 & -627 & 77 & 106 & 28 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow 9L_1 - L_4 \\ \leftarrow 45L_2 - 3L_4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 126 & 0 & 0 & 0 & 276 & -14 & -34 & -28 \\ 0 & -1260 & 0 & 0 & -144 & 84 & -48 & -84 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 315 & -627 & 77 & 106 & 28 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1/126 \\ \leftarrow -L_2/1260 \\ \leftarrow -L_3/7 \\ \leftarrow L_4/315 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2,19 & -0,11 & -0,27 & -0,22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,11 & -0,07 & 0,04 & 0,07 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,57 & 0 & -0,14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1,99 & 0,24 & 0,34 & 0,09 \end{array}\right]$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2,19 & -0,11 & -0,27 & -0,22 \\ 0,11 & -0,07 & 0,04 & 0,07 \\ 0,57 & 0 & -0,14 & 0 \\ -1,99 & 0,24 & 0,34 & 0,09 \end{bmatrix}$$

2. (2,0) Calcule o determinante de A.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 6 \\ 4 & 8 & -3 & 4 \\ -1 & 9 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 11 & 10 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \boxed{4}L_4 + 11L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 106 & 45 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \boxed{7}L_4 + 106L_2 \end{array}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 315 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$detA = \frac{detT}{4.7} = \frac{1.(-4).(-7).(315)}{4.7} = 315$$

3. (1,0) Quantas soluções possui o sistema $AX = B$ onde X e B são matrizes de ordem 4×1, os elementos de X são incógnitas e os elementos de B são, nesta ordem, e, f, g, h? **Justifique sua resposta.**

A é a matriz dada no início da prova. Logo:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 6 \\ 4 & 8 & -3 & 4 \\ -1 & 9 & 9 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Como vimos nas questões 1 e 2, A possui posto máximo. Portanto, o sistema $AX = B$ possui **única** solução.

4. O Teorema de Binet diz que se X e Y são duas matrizes quadradas e de mesma ordem, então o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes, isto é, $det(X.Y) = det(X).det(Y)$.

   (a) (1,0) Se X é uma matriz quadrada e $det(X) = d \neq 0$, qual o determinante de X^2?

Inicialmente, note que $X^2 = X.X$, um produto de **matrizes**. Pelo Teorema de Binet, então,

$$det(X^2) = det(X.X) = det(X).det(X) = d.d = d^2$$

(b) (1,0) Para a mesma matriz X, qual o determinante de X^k, onde k é um número natural maior do que zero?

Usando raciocínio análogo ao do item acima, observe que $X^k = \underbrace{X.X.\cdots.X}_{k\ fatores}$, também um produto de **matrizes**. Pelo Teorema de Binet, então,

$$det(X^k) = det(X).det(\underbrace{X.X.\cdots.X}_{k-1\ fatores}) = det(X).det(X).det(\underbrace{X.X.\cdots.X}_{k-2\ fatores}) = ... = \underbrace{det(X).det(X).\cdots.det(X)}_{k\ fatores}$$

isto é, $det(X^k) = [det(X)]^k = d^k$.

(c) (1,0) Se $X.X^{-1} = I$, qual o deteminante de X^{-1}?

Se $X.X^{-1} = I$, isto é, o produto de uma matriz pela sua inversa é igual a matriz identidade, então os determinantes também são iguais. Em outros termos:

$$X.X^{-1} = I \Longrightarrow det(X.X^{-1}) = det(I)$$

Ora, mas pelo Teorema de Binet, $det(X.X^{-1}) = det(X).det(X^{-1})$. Além disso, $det(I) = 1$. Portanto

$$det(X.X^{-1}) = det(I) \Longleftrightarrow det(X).det(X^{-1}) = 1 \Longleftrightarrow det(X^{-1}) = \frac{1}{det(X)} = \frac{1}{d}$$

(d) (1,0) Qual o determiante de A^u onde $u = a + b + c + d$?.

Com os dados fornecidos pelo aluno, temos $u = a + b + c + d = 3 + 1 + 1 + 2 = 7$ e pelo que vimos no item b,

$$det(A^u) = [det(A)]^u$$

Na segunda questão, calculamos $det(A)$. Assim

$$det(A^u) = [det(A)]^u = 315^7$$

Questões opcionais

5. (2,0) Qual a solução de $AX = B$ descrito na **Questão 3**?

Resolver o sistema $AX = B$ é o mesmo que determinar as incógnitas x, y, z, w que aqui estão representadas pela matriz X. Além disso, vimos na questão 1 que a matriz A possui inversa. Portanto, é possível realizar o seguinte procedimento:

$$AX = B \Longleftrightarrow A^{-1}.(AX) = A^{-1}.B \Longleftrightarrow X = A^{-1}.B$$

Realizando o produto de matrizes, teremos:

$$X = \begin{bmatrix} 2,19 & -0,11 & -0,27 & -0,22 \\ 0,11 & -0,07 & 0,04 & 0,07 \\ 0,57 & 0 & -0,14 & 0 \\ -1,99 & 0,24 & 0,34 & 0,09 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,01 \\ 0,39 \\ -0,71 \\ 3,95 \end{bmatrix}$$

IMPORTANTE: Caso a matriz A não possuísse inversa, para encontrar a solução de $AX = B$ deveríamos usar o método de Gauss ou Gauss-Jordan

6. (1,0) Qual a solução do sistema homogêneo associado ao sistema da **Questão 5**?

   Com os dados fornecidos, e com o fato da matriz A ter posto máximo, segue que a solução do sistema homogêneo associado é somente a solução trivial: $X_h = (0, 0, 0, 0)$

   IMPORTANTE: Caso a matriz A não possuísse inversa, para encontrar a solução de $AX = [0]$ deveríamos usar o método de Gauss ou Gauss-Jordan na questão 5 e determinar a solução do sistema homogêneo associado.