ÁLGEBRA MATRICIAL - 2018.2 - 2ª AVALIAÇÃO PARCIAL - 26/02/2019

Nome:

1. (1,0) Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{3\times 4}$ e $B = [b_{ij}]_{4\times 3}$, onde $a_{ij} = \dfrac{3i - j}{2j}$ e $b_{ij} = \dfrac{j}{3i + j}$, determine:

Solução: Inicialmente, vejamos quem são as matrizes A, B e B^T:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} \\ \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 4 & \frac{7}{4} & 1 & \frac{5}{8} \end{bmatrix}_{3\times 4} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{11} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{13} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}_{4\times 3} \quad B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & \frac{1}{10} & \frac{1}{13} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{2}{11} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

(a) $A + B^T$

$$A + B^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{11}{28} & \frac{1}{10} & -\frac{5}{104} \\ \frac{29}{10} & \frac{5}{4} & \frac{15}{22} & \frac{11}{28} \\ \frac{9}{2} & \frac{25}{12} & \frac{5}{4} & \frac{33}{40} \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

(b) $A.B$

$$A.B = \begin{bmatrix} \frac{201}{728} & \frac{249}{560} & \frac{67}{120} \\ \frac{3047}{3640} & \frac{106}{77} & \frac{211}{120} \\ \frac{727}{520} & \frac{14221}{6160} & \frac{71}{24} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

---

2. Dado

$$S \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5x & + & 2y & + & z & - & 4w & + & 2t & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & 3w & - & 2t & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & + & w & + & t & = & 1 \end{array} \right.$$

(a) (1,0) Represente o sistema acima por meio de uma equação matricial

$$A.X = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) (2,0) Use o método de Gauss-Jordan para encontrar a forma escalonada reduzida do sistema.

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{2} & 2 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{10} & -1 & | & \frac{-1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{113}{10} & -6 & | & \frac{-3}{10} \end{bmatrix}$$

(c) (0,5) Qual o grau de liberdade do sistema e quais as variáveis livres?

Como vemos no item (b), a matriz E_A tem 5 colunas e possui posto 3. Logo, o grau de liberdade é $5-3 = 2$. As variáveis livres correspondem as duas colunas não básicas (sem pivot) na parte esquerda (dos coeficientes), ou seja, serão as variáveis w e t.

(d) (1,0) Determine, se possível, uma solução positiva para o sistema.

Solução do sistema:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{7\alpha}{2} - 2\beta, \frac{-1}{10} - \frac{11\alpha}{10} + \beta, \frac{-3}{10} - \frac{113\alpha}{10} + 6\beta, \alpha, \beta\right)$$

Haverá uma solução positiva para o sistema se cada uma das coordenadas for positiva. Precisamos que, além de $\alpha > 0$ e $\beta > 0$,

$$\frac{1}{2} + \frac{7\alpha}{2} - 2\beta > 0 \Rightarrow \frac{7\alpha}{2} - 2\beta > -\frac{1}{2} \Rightarrow 7\alpha - 4\beta > -1 \Rightarrow \alpha > \frac{4\beta - 1}{7}$$
$$\frac{-1}{10} - \frac{11\alpha}{10} + \beta > 0 \Rightarrow -\frac{11\alpha}{10} + \beta > \frac{1}{10} \Rightarrow -11\alpha + 10\beta > 1 \Rightarrow \alpha < \frac{10\beta - 1}{11}$$
$$\frac{-3}{10} - \frac{113\alpha}{10} + 6\beta > 0 \Rightarrow -\frac{113\alpha}{10} + 6\beta > \frac{3}{10} \Rightarrow -113\alpha + 60\beta > 3 \Rightarrow \alpha < \frac{60\beta - 3}{113}$$

Tomando, por exemplo, $\beta = 1$, temos:

$$\alpha > \frac{3}{7} \cong 0,43, \quad \alpha < \frac{9}{11} \cong 0,82 \quad e \quad \alpha < \frac{57}{113} \cong 0,504$$

Assim, escolhendo $\alpha = 0,5 = \frac{1}{2}$, temos uma solução positiva.

(e) (1,0) Determine a solução do sistema homogêneo associado.

Basta lembrar que a forma escalonada do sistema homogêneo associado é idêntica a E_A, exceto pela última coluna, que é nula:

$$E_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{2} & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{10} & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{113}{10} & -6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Consequentemente, a solução do sistema homogêneo associado é:

$$\left(\frac{7\alpha}{2} - 2\beta, -\frac{11\alpha}{10} + \beta, -\frac{113\alpha}{10} + 6\beta, \alpha, \beta\right)$$

(f) (0,5) Qual o posto e quais as colunas básicas da Matriz Ampliada do sistema S?

Recorrendo novamente à forma escalonada reduzida E_A do sistema inicial, identificamos três pivots, portanto, o posto é igual a 3. Como os pivots aparecem nas três primeiras colunas da matriz, estas são as colunas básicas.

(g) (1,0) Represente as colunas não básicas como combinação linear das colunas básicas, na forma escoladona reduzida obtida em (b).

Mais uma vez, analisando a forma escalonada reduzida E_A do sistema inicial, vimos no item (c) que as colunas não básicas são as colunas 4 e 5. Acabamos de ver no item (g) que as colunas básicas são as colunas 1, 2 e 3. Portanto, escrevendo a coluna 4 como combinação das colunas 1, 2 e 3, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{-7}{2} \\ \frac{11}{10} \\ \frac{113}{10} \end{bmatrix} = \frac{-7}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{11}{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{113}{10}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Já a coluna 5, como combinação das colunas 1, 2 e 3, fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Gilberto, Josué e Adriel fabricam cadeiras de balanço. O quadro abaixo mostra a produção de cada uma nos meses de dezembro (2018), janeiro (2019) e fevereiro (2019).

	dez	jan	fev
GILBERTO	102	190	87
JOSUÉ	92	91	175
ADRIEL	140	110	55

(a) (1,0) Os preços de venda praticados em cada mês pelos três fabricantes foram de R$ 250,00 em dezembro de 2018, R$ 220,00 em janeiro de 2019 e de R$ 180,00 em fevereiro de 2019. Represente por meio de um **produto de duas matrizes**, o **valor arrecadado individualmente** por cada um deles ao final do trimestre indicado.

$$\begin{bmatrix} 102 & 190 & 87 \\ 92 & 91 & 175 \\ 140 & 110 & 55 \end{bmatrix}_{3\times 3} . \begin{bmatrix} 250 \\ 220 \\ 180 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 82.960 \\ 74.520 \\ 69.100 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

(b) (1,0) Se o custo de fabricação para os três é o mesmo e está estipulado em 42% do valor de venda, represente usando **produto de matriz por escalar**, o **lucro** obtido

Se o custo é de 42% então o lucro é de 58%, isto é,

$$\frac{58}{100} \begin{bmatrix} 82.960 \\ 74.520 \\ 69.100 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 48.116,80 \\ 43.221,60 \\ 40.078 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Questões opcionais

4. Diga se verdadeiro ou falso, **justificando**.

(a) (1,0) Um sistema linear tem número de equações igual ao de variáveis e possui uma única solução. Uma forma escalonada qualquer de S e a forma escalonada reduzida, têm a última coluna iguais.

FALSO!. A forma escalonada *reduzida* é única, enquanto uma forma escalonada qualquer pode ter infinitas formas. Quando o sistema tem única solução e número de equações igual ao número de variáveis, a última coluna fornece a solução do sistema. Se fosse uma outra forma escalonada qualquer, para se chegar à solução do sistema, ainda teria que ser realizada uma substituição reversa.

(b) (1,0) Se S é um sistema indetereminado com número de eguações igual ao número de variáveis, então na forma escalonada aparece somente uma linha totalmente nula.

FALSO!. Se o número de equações é igual ao número de variáveis e ainda assim o sistema é indeterminado, é sinal de que apareceram uma **ou mais** linhas nulas. A quantidade vai depender do posto da matriz.

---

5. (UVA - 2018.2) (2,0) Para produzir seus pastéis aos finais de semana, a lanchonete Azul de Fome utiliza goma, aveia e ovo. As quantidades e custos com os três ingredientes estão indicados no quadro ao lado:

Ingrediente	SEX	SÁB	DOM
Goma (kg)	20	40	50
Aveia (kg)	50	120	150
Ovo (unid.)	60	120	160
Custos (em R$)	605	1390	1740

Usando o método de Gauss-Jordan, determine quanto o dono da lanchonete paga por cada quilograma da goma, cada quilograma da aveia e cada unidade do ovo.

O sistema que representa a situação, é o seguinte:

$$S \begin{cases} 20x + 50y + 60z = 605 \\ 40x + 120y + 120z = 1390 \\ 50x + 150y + 160z = 1740 \end{cases}$$

onde x é o preço de um quilograma de goma, y o preço de um quilograma de aveia, e z o preço da unidade do ovo. A matriz ampliada é a seguinte:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 20 & 50 & 60 & | & 605 \\ 40 & 120 & 120 & | & 1390 \\ 50 & 150 & 160 & | & 1740 \end{bmatrix}$$

e a forma escolanada reduzida é:

$$[E_A|\Delta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & 9 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Isto é, o quilograma da goma custa R$ 7,00, o quilograma da aveia custa R$ 9,00 e a unidade do ovo custa R$ 0,25.