

ÁLGEBRA MATRICIAL - 2018.2 - 1ª AVALIAÇÃO PARCIAL - 17/12/2018

Prova comentada

1. No preparo do solo para o plantio, é preciso fornecer (através de fertilizantes) os macronutrientes primários (Nitrogênio, Fósforo e Potássio), os macronutrientes secundários (Cálcio, Magnésio e enxofre) e os Micronutrientes (Boro, Ferro, Zinco, Manganês, Cobre, Molibdênio e Cloro). Em uma determinada localidade, é recomendado que cada hectare¹ de terreno seja tratado com 298kg de fósforo, 365kg de potássio, 567kg de nitrogênio e 40,6kg de cálcio. Suponha que existam quatro marcas de fertilizantes no mercado, digamos, as marcas X, Y, Z e W. Uma porção de 100g da marca X contém 3g de fósforo, 4g de potássio, 7g de nitrogênio e 0,3g de cálcio. Uma porção de 100g da marca Y contém 1g de fósforo, 2g de potássio, 1g de nitrogênio e 0,2g de cálcio. Já uma porção de 100g da marca Z contém 3g de fósforo, 3g de potássio, 6g de nitrogênio e 0,4g de cálcio. Por fim, cada 100g da marca W contém 5g de fósforo, 4g de potássio, 7g de nitrogênio e 0,9g de cálcio.

Questão central: quantos quilogramas de cada fertilizante devem ser comprados para que 50 hectares de terra sejam preparados adequadamente? Para tanto, responda os itens a seguir:

(a) (0,5) Construa um quadro para abrigar as informações sobre cada marca de fertilizante e suas respectivas quantidades (por porção de 100g) dos nutrientes mencionados acima.

Neste item, há diversas formas para se construir tal quadro. Considerando diferenças nas unidades de medidas a serem adotadas, vemos três possibilidades a seguir.

Nutrientes	g por porção de 100g				Total (Kg/hec)
	X	Y	Z	W	
Fósforo	3	1	3	5	298
Potássio	4	2	3	4	365
Nitrogênio	7	1	6	7	567
Cálcio	0,3	0,2	0,4	0,9	40,6

ou

Nutrientes	g por porção de 100g				Total (g/hec)
	X	Y	Z	W	
Fósforo	3	1	3	5	298.000
Potássio	4	2	3	4	365.000
Nitrogênio	7	1	6	7	567.000
Cálcio	0,3	0,2	0,4	0,9	40.600

ou

Nutrientes	g por porção de 1kg				Total (Kg/hec)
	X	Y	Z	W	
Fósforo	30	10	30	50	298
Potássio	40	20	30	40	365
Nitrogênio	70	10	60	70	567
Cálcio	3	2	4	9	40,6

¹Quadrado de lado 100m.

(b) (0,5) Visando a montagem de um sistema para resolver a questão central deste problema, quais as **variáveis** e o que elas representam?

A questão central é determinar quantos quilogramas devem ser comprados de cada marca de fertilizante. Então, nada mais natural do que usar as variáveis x, y, z, w onde:

- x : quantidade em Kg do fertilizante X;
- y : quantidade em Kg do fertilizante Y;
- z : quantidade em Kg do fertilizante Z;
- w : quantidade em Kg do fertilizante W;

Poderia-se adotar a unidade de medidas em gramas (g), com cuidado na hora da montagem e/ou interpretação da solução do sistema.

(c) (2,0) Construa um sistema de equações lineares, cuja solução represente ao proprietário da terra, a maneira mais adequada para uso das quatro marcas de fertilizantes. Vamos considerar o terceiro quadro apresentado no item (a) e analisar o nutriente Fósforo: são necessários 298Kg deste nutriente para preparar 1 hectare de solo.

Se para cada quilograma do fertilizante X, tem-se 30g de fósforo, então para x quilogramas do fertilizante X, teremos $30x$ gramas de fósforo.

Da mesma forma, se para cada quilograma do fertilizante Y tem-se 10g de fósforo, então para y quilogramas deste fertilizante, teremos $10y$ gramas de fósforo.

Repetindo o raciocínio para as marcas Y e W, temos $30z$ gramas de fósforo em z quilogramas do fertilizante Z e $50w$ gramas de fósforo em w quilogramas do fertilizante W.

Além disso, o total de fósforo para esta área (1 hectare) deve ser de exatamente 298Kg (ou 298.000g). Logo:

$$\underbrace{30x + 10y + 30z + 50w}_{\text{Em gramas}} = \underbrace{298.000}_{\text{Em gramas}}$$

Analogamente construímos as demais equações:

$$40x + 20y + 30z + 40w = 365.000$$

$$70x + 10y + 60z + 70w = 567.000$$

$$3x + 2y + 4z + 9w = 40.600$$

chegando, assim, ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} 30x + 10y + 30z + 50w = 298.000 \\ 40x + 20y + 30z + 40w = 365.000 \\ 70x + 10y + 60z + 70w = 567.000 \\ 3x + 2y + 4z + 9w = 40.600 \end{cases}$$

Lembrando: x, y, z e w são as quantidades de **quilogramas** de cada fertilizante.

(d) (2,0) Usando o método de Gauss-Jordan, **resolva o sistema.**

Matriz Ampliada do sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 30 & 10 & 30 & 50 & 298.000 \\ 40 & 20 & 30 & 40 & 365.000 \\ 70 & 10 & 60 & 70 & 567.000 \\ 3 & 2 & 4 & 9 & 40600 \end{array} \right]$$

Simplificando as três primeiras linhas (dividindo por 10) e já partindo para o método de Gauss-Jordan, temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 3 & 5 & 29800 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 36500 \\ 7 & 1 & 6 & 7 & 56700 \\ 3 & 2 & 4 & 9 & 40600 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow 3L_2 - 4L_1 \\ \leftarrow 3L_3 - 7L_1 \\ \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 3 & 5 & 29800 \\ 0 & 2 & -3 & -8 & -9700 \\ 0 & -4 & -3 & -14 & -38500 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 10800 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ \\ \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ \leftarrow 2L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 9 & 18 & 69300 \\ 0 & 2 & -3 & -8 & -9700 \\ 0 & 0 & -9 & -30 & -57900 \\ 0 & 0 & 5 & 16 & 31300 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1/3 \\ \\ \leftarrow -L_1/3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 6 & 23100 \\ 0 & 2 & -3 & -8 & -9700 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 19300 \\ 0 & 0 & 5 & 16 & 31300 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - L_3 \\ \leftarrow L_2 + L_3 \\ \\ \leftarrow 3L_4 - 5L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -4 & 3800 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 9600 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 19300 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2600 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1/2 \\ \leftarrow L_2/2 \\ \\ \leftarrow L_4/-2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 1900 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4800 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 19300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1300 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 + 2L_4 \\ \leftarrow L_2 - L_4 \\ \leftarrow L_3 - 10L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4500 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3500 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1300 \end{array} \right] \leftarrow L_3/3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4500 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1300 \end{array} \right]$$

Portanto, a solução do sistema é: (4500,3500,2100,1300), ou seja, para preparar 1 hectare de solo são necessários:

- 4500kg do fertilizante da marca X;
- 3500kg do fertilizante da marca Y;
- 2100kg do fertilizante da marca Z;
- 1300Kg do fertilizante da marca W.

(e) (2,0) **Qual a solução do problema, isto é, da questão central?**

Para resolver o problema, lembre que 50 hectares de solo devem ser preparados. Portanto, as quantidades encontradas no item anterior devem ser multiplicadas por 50. Daí, devem ser comprados:

- 225.000kg do fertilizante da marca X;
- 175.000kg do fertilizante da marca Y;
- 105.000kg do fertilizante da marca Z;
- 65.000kg do fertilizante da marca W.

2. Sejam $abc.def.ghi - jk$ o número do seu CPF e S o sistema a seguir:

$$S \begin{cases} ix + by + cz = 2 \\ dx + ey + fz = 1 \\ gx + hy + az = 1 \end{cases}$$

Na montagem da matriz aumentada do sistema S , g, e, c formam a diagonal **secundária** da matriz dos coeficientes.

(a) (2,0) Use operações elementares na matriz aumentada até que cada elemento da diagonal secundária (na parte dos coeficientes) seja igual a 1 e que cada elemento fora da diagonal secundária (mas ainda considerando a parte dos coeficientes) seja igual a 0.

Considerando o CPF fictício 123.456.789-00, temos a seguinte matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 2 & \boxed{3} & 2 \\ 4 & \boxed{5} & 6 & 1 \\ \boxed{7} & 8 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 2 & \boxed{3} & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 2 & 3 & 2 \\ -14 & \boxed{1} & 0 & -3 \\ 12 & 22 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ \leftarrow L_3 - 22L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 37 & 0 & 3 & 8 \\ -14 & 1 & 0 & -3 \\ \boxed{320} & 0 & 0 & 67 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow 320.L_1 - 37.L_3 \\ \leftarrow 160.L_2 + 7.L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 960 & 81 \\ 0 & 160 & 0 & -11 \\ 320 & 0 & 0 & 67 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1/960 \\ \leftarrow L_2/160 \\ \leftarrow L_3/320 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{27}{320} \\ & & & | \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-11}{160} \\ & & & | \\ 1 & 0 & 0 & \frac{67}{320} \end{array} \right]$$

(b) (1,0) De acordo com a forma escalonada obtida no item (a), qual a solução do sistema S ?

Observe que a posição dos pivots influenciam na solução do sistema. O pivot da coluna 1 corresponde a variável x , ou seja, $x = \frac{67}{320}$. Assim, a solução do sistema é:

$$S = \left(\frac{67}{320}, \frac{-11}{160}, \frac{27}{320} \right)$$

■