3ª Avaliação Parcial - Álgebra Matricial - 2016.1

1. Verdadeiro ou falso? Justifique:

   (a) Sejam A e B matrizes não singulares. Então $\det(A.B) = 0$

   (b) Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Então $\det(A^*) = \det A$.

   (c) Seja A uma matriz quadrada. Então $\det(A^2) = [\det(A)]^2$.

   (d) O determinante de uma matriz antissimétrica é nulo.

2. Seja S um sistema linear com n equações e n variáveis.

   (a) Sendo A a matriz dos coeficientes do sistema e $[A \mid b]$ a matriz aumentada do mesmo sistema, classifique, em termos de $posto(A)$ e $posto(A \mid b)$, as possibilidades para solução de S.

   (b) Explique qual a relação entre o que você explicou no item anterior e o determinante de A.

3. A equação de um plano no espaço tridimensional é dada por

$$ax + by + cz + d = 0$$

   Assim, para saber se o ponto (α, β, γ) pertence ao plano, basta substituir x, y, z da equação por α, β, γ respectivamente.

   (a) Sejam (x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), (x_C, y_C, z_C), (x_D, y_D, z_D) quatro pontos no espaço. Escreva a matriz Δ de ordem 4×4 onde a primeira linha é formada pela primeira coordenada de cada ponto dado. A segunda linha é formada pela segunda coordenada de cada ponto dado e a terceira linha é formada pela terceira coordenada de cada ponto dado. Na quarta linha, coloque todos os elementos iguais a 1.

   (b) Na matriz Δ construída no item (a), multiplique a primeira linha por a, a segunda linha por b, a terceira linha por c e a quarta linha por d.

   (c) Mostre que é possível escalonar Δ de modo que $posto(\Delta) < 4$.

   (d) É possível usar determinantes para determinar se quatro pontos no espaço são coplanares? Justifique.

4. Calcule o determinante da matriz abaixo, onde:

   (a) $abc.def.ghi - jk$ representa o número do seu CPF;

   (b) $xyzw$ é o ano de seu nascimento;

   (c) pq é o dia do seu nascimento;

   (d) rs é o mês de seu nascimento;

   (e) Se você é mulher, use $\alpha = 0$. Caso contrário, use $\alpha = 1$.

   (f) $\beta = a + c + e$, $\gamma = f - h$, $\theta = y - w$ e $\xi = \alpha + \gamma$.

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & x & y & z & w \\ p & q & r & s & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \theta & \xi \end{bmatrix}$$