Lista 02 - Matemática Básica II - 2016.2

1. Encontre a medida em radianos do ângulo θ, sendo θ o ângulo central de um arco que mede s em um círculo de raio r.

   (a) $r = 3, \quad s = 9$

   (b) $r = 12, \quad s = 3\pi$

   (c) $r = \frac{1}{4}, \quad s = \frac{1}{2}$

2. Los Angeles e São Francisco (Estados Unidos) estão separadas por 450 milhas na superfície terrestre. Admitindo que o raio da Terra é de 4.000 milhas, encontre a medida em radianos do ângulo central com vértice no centro da Terra que tem as cidades citadas no outro lado.

3. Converta para radianos

   (a) 260^0

   (b) 420^0

   (c) $120^0 40'$

4. Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos de um relógio durante cinco minutos?

5. Converta para graus

   (a) $\frac{4\pi}{3} rad$

   (b) $\frac{11\pi}{4} rad$

   (c) $0.25\ rad$

6. No famoso relógio de Londres, o Big Ben, o ponteiro dos minutos mede cerca de 14 pés[1]. Qual a distância em metros que a ponta do ponteiro percorre após 25 minutos?

7. Exprima em radianos as medidas dos arcos a e b tais que $a - b = 15^0$ e $a + b = \frac{7\pi}{4} rad$.

8. Exprima em graus as medidas dos arcos a, b, c tais que $a + b + c = 13^0$, $a + b + 2c = \frac{\pi}{12} rad$ e $a + 2b + c = \frac{\pi}{9} rad$.

9. Calcule a medida do ângulo central $a\widehat{O}b$ que determina em uma circunferência de raio r um arco de comprimento $\frac{2\pi r}{3}$.

10. Calcule o comprimento l do arco $\widehat{AB}$ definido em uma circunferência de raio 7 cm por um ângulo central de 4,5 rad.

11. Divide-se o ciclo trigonométrico em 8 partes iguais sendo $A(1, 0)$ um dos pontos divisores. Determine o conjunto dos $x \in [0, 2\pi]$ cujas imagens são os pontos divisores.

[1] 1 pé=0,3048m

12. Dadas as coordenadas geográficas das cidades abaixo e considerando o raio da Terra $6371Km$, calcule a distância geodésica entre uma cidade brasileira e uma cidade europeia:

$$R.\arccos[\text{sen}(LT_1).\text{sen}(LT_2) + \cos(LT_1).\cos(LT_2).\cos(LN_1 - LN_2)]$$

Cidade	Latitude	Longitude
Acaraú (CE)	$02^0 53' 08'' S$	$40^0 07' 12'' W$
Ipueiras (CE)	$04^0 32' 30'' S$	$40^0 43' 08'' W$
Londrina (PR)	$23^0 18' 37'' S$	$51^0 09' 46'' W$
Cuiabá (MT)	$15^0 35' 46'' S$	$56^0 05' 48'' W$
Berlim (ALE)	$54^0 31' 33'' N$	$15^0 15' 18'' E$
Roma (ITA)	$41^0 54' 10'' N$	$12^0 29' 56'' E$
Baku (AZE)	$40^0 24' 33'' N$	$49^0 52' 01'' E$
Copenhage (DIN)	$55^0 40' 33'' N$	$12^0 34' 06'' E$

13. Utilizando simetria e sabendo que $\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ dê o valor do seno de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

14. Utilizando simetria e sabendo que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dê o valor do cosseno de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

15. Utilizando simetria e sabendo que $\text{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dê o valor da tangente de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

16. Utilizando simetria e sabendo que $\text{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ dê o valor da cotangente de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

17. Utilizando simetria e sabendo que $\text{cossec}\frac{\pi}{6} = 2$ dê o valor da cossecante de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

18. Utilizando simetria e sabendo que $\sec\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ dê o valor da secante de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

19. Sabendo que $\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dê o valor do seno de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

20. Sabendo que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ dê o valor do cosseno de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

21. Sabendo que $\text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ dê o valor da tangente de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

22. Sabendo que $\text{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dê o valor da cotangente de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

23. Sabendo que $\sec\frac{\pi}{3} = 2$ dê o valor da secante de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

24. Sabendo que $\text{cossec}\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ dê o valor da cossecante de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

25. Localize os arcos no ciclo trigonométrico e coloque em ordem crescente os números $\text{sen}60^0$, $\text{sen}150^0$, $\text{sen}240^0$, $\text{sen}330^0$. Idem para os números $\cos 60^0$, $\cos 150^0$, $\cos 240^0$, $\cos 330^0$ e também para os números $\text{tg}60^0$, $\text{tg}120^0$, $\text{tg}210^0$ e $\text{tg}330^0$.

26. Idem para $\text{cotg}60^0$, $\text{cotg}120^0$, $\text{cotg}210^0$ e $\text{cotg}330^0$, para $\sec 60^0$, $\sec 120^0$, $\sec 210^0$ e $\sec 330^0$ e também para $\text{cossec}60^0$, $\text{cossec}150^0$, $\text{cossec}240^0$ e $\text{cossec}300^0$.

27. Sabendo que $\text{cossec}x = -\dfrac{25}{24}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule as demais funções circulares de x.

28. Sabendo que $tgx = \dfrac{12}{5}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule as demais funções circulares de x.

29. Calcule $\sec x$ sabendo que $\text{sen}x = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$, com $a > b > 0$.

30. Sendo $\text{sen}x = \dfrac{1}{3}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ calcule o valor de

$$y = \frac{1}{\text{cossec}x + \text{cotg}x} + \frac{1}{\text{cossec}x - \text{cotg}x}$$

31. Sabendo que $\text{cotg}x = \dfrac{24}{7}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule o valor de

$$y = \frac{\text{tg}x.\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

32. Dado que $\cos x = \dfrac{2}{5}$ e $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, obtenha o valor de

$$y = (1+\text{tg}^2x)^2 + (1-\text{tg}^2x)^2$$

33. Calcule $\text{sen}x$ e $\cos x$, sabendo que $3.\cos x + \text{sen}x = -1$.

34. Calcule $\text{sen}x$ e $\cos x$, sabendo que $5.\sec x - 3.\text{tg}^2x = 1$.

35. Obtenha $\text{tg}x$, sabendo que $\text{sen}^2x - 5.\text{sen}x.\cos x + \cos^2 x = 3$.

36. Calcule m de modo a obter $\text{sen}x = 2m+1$ e $\cos x = 4m+1$.

37. Calcule m de modo a obter $\text{tg}x = m-2$ e $\text{cotg}x = \dfrac{m}{3}$.

38. Determine a de modo a obter $\cos x = \dfrac{1}{a+1}$ e $\text{cossec}x = \dfrac{a+1}{\sqrt{a+2}}$.

39. Determine uma relação entre x e y, independente de t, sabendo que $x = 5.\text{tg}(t)$ e $y = 3.\text{cossec}(t)$.

40. Se $\text{sen}x + \cos x = a$ e $\text{sen}x.\cos x = b$, obtenha uma relação entre a e b, independente de x.

41. Dado que $\text{sen}x.\cos x = m$, calcule o valor de $y = \text{sen}^4x + \cos^4 x$ e $z = \text{sen}^6x + \cos^6 x$.

42. Sabendo que $\text{sen}x + \cos x = a$, calcule $y = \text{sen}^3x + \cos^3 x$.

43. Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

(a) $\dfrac{1-\text{tg}^2x}{1+\text{tg}^2x} = 1 - 2\text{sen}^2x$

(b) $\dfrac{\cos x - \text{sen}x}{\cos x + \text{sen}x} = \dfrac{1-\text{tg}x}{1+\text{tg}x}$

(c) $\dfrac{1-\text{sen}x}{1+\text{sen}x} = (\sec x - \text{tg}x)^2$

(d) $\dfrac{\text{sen}x}{\text{cossec}x - \text{cotg}x} = 1 + \cos x$

44. Calcule k de modo que as raízes da equação $x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$ sejam o seno e o cosseno de um mesmo ângulo.

45. Prove que

$$\text{sen}^6x + \cos^6 x - 2\text{sen}^4x - \cos^4 x + \text{sen}^2x = 0$$

46. Prove que

$$\frac{\text{sen}x - 2\text{sen}^3x}{2\cos^3 x - \cos x} = \text{tg}x$$

47. Verifique cada uma das seguintes identidades:

(a) $\text{cossec}x + \text{cotg}x.\sec x = 2.\text{cossec}x$

(b) $\cos x + \text{sen}x.\text{tg}x = \sec x$

(c) $\dfrac{\cos x.\text{cossec}x}{\text{cotg}^2x} = \text{tg}x$

(d) $\dfrac{1}{\text{sen}x} + \dfrac{1}{\text{cossec}x} = \text{cossec}x + \text{sen}x$

(e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right).\text{cotg}\theta + \text{tg}\theta.\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta + \text{sen}\theta$

(f) $\dfrac{\text{tg}x}{\sec^2 x} = \cos x.\text{sen}x$

(g) $\left[\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\right].(1 - \cos^2\theta).\sec\theta = \text{sen}\theta$

(h) $\dfrac{(1-\text{sen}^2x).\text{tg}x}{\text{sen}^2x} = \text{cotg}x$

(i) $\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\right].(\text{sen}\theta + \text{cotg}\theta.\cos\theta) = 1$

(j) $\dfrac{\text{sen}x - 1}{\text{cossec}x}.(\text{cossec}x + 1) = -\cos^2 x$

(k) $\text{sen}\theta = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right).\text{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

(l) $\text{sen}\theta + \cos\theta.\text{cotg}\theta = \text{cossec}\theta$

(m) $\text{cossec}\theta.\text{tg}\theta - \text{sen}\theta = \dfrac{\text{tg}\theta - \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\theta}$

(n) $\sec\theta.\text{tg}\theta - \text{cotg}\theta = \dfrac{\text{tg}^2\theta - \cos\theta}{\text{sen}\theta}$

(o) $\sec^2\theta(\cos^2\theta - 1) = -\text{tg}^2\theta$

(p) $\sec x = \text{cossec}x(90^0 - x)$

(q) $\text{tg}^2 x.\text{sen}x + \text{sen}x = \dfrac{\text{tg}x}{\cos x}$

(r) $\cos^2 x - \text{cossec}x = \dfrac{\text{sen}x.\cos x - \sec x}{\sec x.\text{sen}x}$

48. Mostre que

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \text{e} \qquad \text{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

49. Verifique cada uma das seguintes identidades:

(a) $\sec 2x = 1 + \text{tg}x.\text{tg}2x$

(b) $\text{cossec}2x = \dfrac{\sec x.\text{cossec}x}{2}$

(c) $\text{cotg}2x = \dfrac{\text{cotg}x - \text{tg}x}{2}$

(d) $\text{tg}x = \dfrac{\text{sen}2x}{1+\cos 2x}$

(e) $\dfrac{2.\text{tg}x}{\text{tg}2x} = 2 - \sec^2 x$

(f) $\text{sen}x = \dfrac{2.\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}$

(g) $\text{cotg}x = \dfrac{\cos 2x + 1}{\text{sen}2x}$

(h) $\text{sen}3x = 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3 x$

(i) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(j) $\text{tg}3x = \dfrac{3\text{tg}x - \text{tg}^3 x}{1 - 3\text{tg}^2 x}$

50. Use as identidade de arco-metade para encontrar o valor de cada expressão

(a) $\text{sen}\dfrac{\pi}{12}$

(b) $\cos\dfrac{\pi}{12}$

(c) $\text{tg}\dfrac{\pi}{12}$

(d) $\text{sen}\dfrac{5\pi}{12}$

(e) $\cos\dfrac{7\pi}{12}$

51. Mostre que

$$\text{sen}x.\text{sen}y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$
$$\cos x.\cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\text{sen}x.\cos y = \frac{\text{sen}(x+y)+\text{sen}(x-y)}{2}$$
$$\cos x.\text{sen}y = \frac{\text{sen}(x+y)-\text{sen}(x-y)}{2}$$

52. Mostre que

(a) $\text{cotg}x = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{\text{sen}(x+y)+\text{sen}(x-y)}$

(b) $\text{sen}2x.\text{tg}2x = 2.\text{sen}^2x$

(c) $1-\cos^2 x = 4.\text{sen}^2\dfrac{x}{2}.\cos^2\dfrac{x}{2}$

(d) $\dfrac{\text{sen}9x}{\text{sen}3x} - \dfrac{\cos 9x}{\cos 3x} = 2$

(e) $2.\cos x.\text{tg}y = \text{sen}x + \cos x.(2\text{tg}y - \text{tg}x)$

(f) $4.\text{sen}x.\cos x.\text{sen}y.\cos y = \text{sen}^2(x+y) - \text{sen}^2(x-y)$

(g) $\text{tg}^2x.\cos 2x + \cos 2x = 2 - \sec^2 x$

(h) $2.\text{sen}x.\cos x = \text{tg}x + \text{tg}x.\cos 2x$

(i) $2.\text{sen}^2x.\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2x - \cos 2x + \text{sen}^2x.\cos 2x$

(j) $\text{sen}^3 2x = \text{sen}x.\cos x(1-\cos 4x)$

53. Encontre seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente, realizando redução ao primeiro quadrante:

(a) $x = \dfrac{5\pi}{6}rad$

(b) $x = \dfrac{3\pi}{4}rad$

(c) $x = 165^0$

(d) $x = 171^0$

(e) $x = 189^0$

(f) $x = 205^0$

(g) $x = 288^0$

(h) $x = 324^0$