Equações Trigonométricas

Prof. Márcio Nascimento

marcio@matematicauva.org

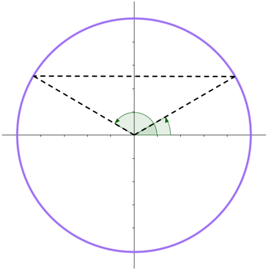
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática Básica II - 2016.2

30 de maio de 2017

Exemplo (1)

Resolver a equação $2\mathrm{sen}x - 1 = 0$

- $2\mathrm{sen}x - 1 = 0 \iff 2\mathrm{sen}x = 1 \iff \mathrm{sen}x = \dfrac{1}{2}$
- Isso ocorre quando $x = \dfrac{\pi}{6} rad \quad \mathrm{ou} \quad x = \dfrac{5\pi}{6} rad$



- E também quando $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \mathrm{ou} \quad x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$
- $\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x = (\frac{\pi}{6} + 2k\pi) rad \ \mathrm{ou}\ x = (\frac{5\pi}{6} + 2k\pi) rad, k \in \mathbb{Z}\right\}$

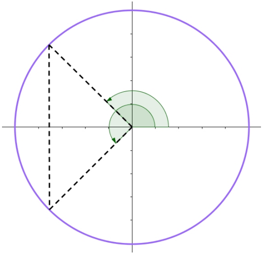
Exemplo (2)

Resolver a equação $2\mathrm{sen}x - 3 = 0$

- $2\mathrm{sen}x - 3 = 0 \iff 2\mathrm{sen}x = 3 \iff \mathrm{sen}x = \dfrac{3}{2}$
- Como não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{sen}x = \dfrac{3}{2}$, o conjunto solução da equação dada é **vazio**.
- $\mathcal{S} = \{\ \}$ ou $\mathcal{S} = \varnothing$

Exemplo (3)

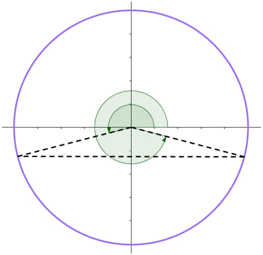
Resolver a equação $\cos(x - 25^0) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



- Na primeira volta, $x - 25^0 = 135^0$ ou $x - 25^0 = 225^0$
- Isso implica que $x = 160^0$ ou $x = 250^0$
- Considerando todos os valores de x, temos:
  $x = 160^0 + k.360^0$ ou $x = 250^0 + k.360^0$.
- $\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R}\ ;\ x = (160 + 360k)^0 \text{ ou } x = (250 + 360k)^0, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemplo (4)

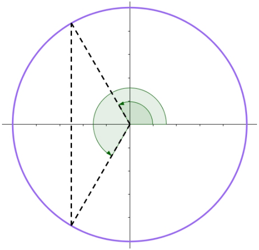
Resolver a equação $3\mathrm{sen}x - 2 = 7\mathrm{sen}x - 1$, *com* $0^0 \leq x < 360^0$

- $3\mathrm{sen}x - 7\mathrm{sen}x = -1 + 2 \iff 4\mathrm{sen}x = -1 \iff \mathrm{sen}x = -\dfrac{1}{4}$
- $arcsen\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -0.2527rad = -14.4836^0 = 345,5164^0$
- 
- Veja que x também pode ser igual a 194.4836^0.
- $\mathcal{S} = \left\{194.4836^0; 345.5164^0\right\}$

Exemplo (5)

Resolver a equação $2\cos^2 x - 9\cos x = 5$, *com* $x \in [0, 2\pi)$

- Fazendo $\cos x = y$, temos: $2y^2 - 9y - 5 = 0$
- O discriminante desta equação é: $\Delta = 121$
- Portanto, para esta equação, podemos ter $y = 5$ ou $y = -\dfrac{1}{2}$
- Ou seja, $\cos x = 5$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$
- Como não ocorrre $\cos x > 1$, então $\cos x = 5$ deve ser desconsiderado.



- $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3} \right\}$

Exemplo (6)

Resolver a equação $2\cos x - 1 = \sec x$*, com* $x \in [0, 2\pi)$

- $2\cos x - 1 = \sec x \iff 2\cos x - 1 = \frac{1}{\cos x} \iff 2\cos^2 x - \cos x = 1$
- Fazendo $\cos x = y$, temos $2y^2 - y - 1 = 0$ e $\Delta = 9$
- Portanto, para esta equação, podemos ter $y = 1$ ou $y = -\dfrac{1}{2}$
- Ou seja, $\cos x = 1$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$
- e, portanto, $x = 0$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$
- $\mathcal{S} = \left\{0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

Exemplo (7)

Resolver a equação $\text{sen}2x + \sqrt{2}\cos x = 0$, *com* $x \in [0, 360^0)$

- Lembrando que $\text{sen}2x = 2.\text{sen}x.\cos x$, temos:
- $\text{sen}2x + \sqrt{2}\cos x = 0 \iff 2.\text{sen}x.\cos x + \sqrt{2}\cos x = 0$
- Ou ainda, $\cos x.(2\text{sen}x + \sqrt{2}) = 0$
- Assim, $\cos x = 0$ ou $2\text{sen}x + \sqrt{2} = 0$
- A primeira igualdade implica em $x = 90^0$ ou $x = 270^0$.
- Já a segunda igualdade implica em $\text{sen}x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, isto é, $x = 225^0$ ou $x = 315^0$.
- $\mathcal{S} = \left\{90^0, 270^0, 225^0, 315^0\right\}$

Exemplo (8)

Resolver a equação $\cos 2x + 3\mathrm{sen}x - 2 = 0$, *com* $x \in [0, 360^0)$

- Lembrando que $\cos 2x = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x$, temos:
- $\cos 2x + 3\mathrm{sen}x - 2 = 0 \iff (\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x) + 3\mathrm{sen}x - 2 = 0$
- Ou ainda, $(1 - \mathrm{sen}^2 x) - \mathrm{sen}^2 x + 3\mathrm{sen}x - 2 = 0$
- Que, organizando, resulta em: $2\mathrm{sen}^2 x - 3\mathrm{sen}x + 1 = 0$.
- Fazendo $\mathrm{sen}x = y$, a equação equivale a $2y^2 - 3y + 1 = 0$, cujo discriminante é $\Delta = 1$
- Daí, $y = 1$ ou $y = \dfrac{1}{2}$, ou seja,
- $\mathrm{sen}x = 1$ ou $\mathrm{sen}x = \dfrac{1}{2}$
- $\mathcal{S} = \left\{30^0, 90^0, 150^0\right\}$

Exemplo (9)

Resolver a equação $\mathrm{sen} x - \cos x = 1$, *com* $x \in [0, 2\pi)$

- $\mathrm{sen} x = 1 + \cos x$
- Daí,
  $\mathrm{sen}^2 x = (1 + \cos x)^2 \Longleftrightarrow (1 - \cos^2 x) = 1 + 2\cos x + \cos^2 x$
- Ou seja, $-2\cos^2 x - 2\cos x = 0 \Longrightarrow \cos^2 x + \cos x = 0$
- Isso equivale a: $\cos x(\cos x + 1) = 0$. Isto é, $\cos x = 0$ ou $\cos x = -1$.
- Se $\cos x = 0$, então $x = \pi/2$ ou $x = 3\pi/2$
- Se $\cos x = -1$, então $x = \pi$.
- $\mathcal{S} = \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. **Será?**
- Checando, vemos que $3\pi/2$ não torna verdadeira a igualdade! Por quê!?

Exemplo (10)

Resolver a equação $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, *com* $x \in [0, 360^0)$

- Resposta...
- $\mathcal{S} = \left\{15^0, 165^0, 195^0, 345^0\right\}$.

Exemplo (11)

Resolver a equação $\mathrm{tg} 3x = 1$, *com* $x \in [0, \pi)$

- Resposta...
- $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4} \right\}$.

Exemplo (12)

Resolver a equação $\mathrm{sen} 2x. \cos x + \cos 2x . \mathrm{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *com* $x \in [0, 2\pi)$

- Resposta...
- $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{2}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \right\}$.

Exemplo (13)

Encontre 9 soluções particulares e a solução geral da equação $2\mathrm{sen}^2 3x - \mathrm{sen} 3x - 1 = 0$, *com* $x \in \mathbb{R}$

- Resposta...
- $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{\pi + 4k\pi}{6}, \dfrac{\pi + 12k\pi}{18}, \dfrac{5\pi + 12k\pi}{18} \;;\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- Soluções particulares (por exemplo):

$$k = 0 : \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$$

$$k = 1 : \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}$$

$$k = 2 : \frac{3\pi}{2}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}$$