Área de Triângulos - Fórmula de Heron

Prof. Márcio Nascimento

marcio@matematicauva.org

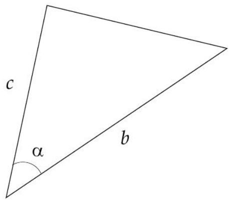
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática Básica II - 2016.2

23 de maio de 2017

Sumário

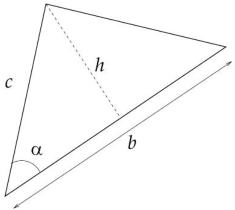
Sumário

Caso LAL



Considere o caso em que são conhecidos dois lados do triângulo e o ângulo formado por tais lados.

Caso LAL



- $\text{sen}\alpha = \dfrac{h}{c}$
- $h = c.\text{sen}\alpha$
- $A = \dfrac{1}{2}b.h \Longrightarrow A = \dfrac{1}{2}.b.c.\text{sen}\alpha$

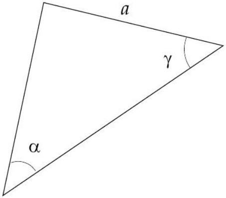
Caso LAL

Exemplo: Encontre a área do triângulo ABC sendo $A = 35.1^0$, $b = 2.43cm$ e $c = 3.57cm$.

- Resposta...
- $2.49cm^2$

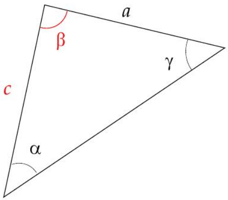
Sumário

Caso AAL



Agora, considere o caso em que são conhecidos dois ângulos e um lado do triângulo.

Caso AAL



- Tendo α e γ, facilmente determinamos β;
- Usando a lei dos Senos, encontramos o lado c:

$$\frac{c}{\text{sen}\gamma} = \frac{a}{\text{sen}\alpha} \Longrightarrow c = \frac{a.\text{sen}\gamma}{\text{sen}\alpha}$$

- Agora, com os lados a, c e o ângulo β, temos:

$$A = \frac{1}{2}ac.\text{sen}\beta \Longrightarrow A = \frac{1}{2}a\left(\frac{a.\text{sen}\gamma}{\text{sen}\alpha}\right).\text{sen}\beta \Longrightarrow A = \frac{a^2.\text{sen}\gamma.\text{sen}\beta}{2\text{sen}\alpha}$$

Caso AAL

Exemplo: Encontre a área do triângulo ABC sendo que $A = 24^0 10'$, $B = 120^0 40'$ e $a = 4.25cm$

- Resposta...
- $10.93cm^2$

Sumário

Caso LLL

Heron de Alexandria, geômetra do século I d.C.. No livro I da sua obra *Métrica*, Heron apresenta uma forma para cálculo da área de um triângulo qualquer usando apenas as medidas dos lados.

Caso LLL

Fórmula de Heron

Dado um triângulo de lados a, b, c *definimos o seu semiperímetro por*

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

e a sua área é dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

- Exemplo: Calcular a área do triângulo de lados 12cm, 14cm, 8cm.
- Resposta...
- $48cm^2$

Prova da Fórmula de Heron

- Já vimos que $A = \frac{1}{2}ab.\mathrm{sen}\,\widehat{C}$
- Elevando ambos os membros ao quadrado, $A^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\mathrm{sen}^2\,\widehat{C}$
- Isolando $\mathrm{sen}^2\,\widehat{C}$, temos: $\mathrm{sen}^2\,\widehat{C} = \frac{4A^2}{a^2b^2}$
- Equivalentemente, $\frac{4A^2}{a^2b^2} = 1 - \cos^2\widehat{C}$
- Ou seja, $\boxed{\frac{4A^2}{a^2b^2} = (1 - \cos\widehat{C})(1 + \cos\widehat{C})}$

Prova da Fórmula de Heron

$$\boxed{\frac{4A^2}{a^2b^2} = (1 - \cos\widehat{C})(1 + \cos\widehat{C})}$$

- Por outro lado, pela lei dos cossenos,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{C} \Rightarrow \cos\widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

- Daí,
$$(1 - \cos\widehat{C})(1 + \cos\widehat{C}) = \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) . \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$
- $= \left(\frac{2ab - (a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}\right) . \left(\frac{2ab + (a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}\right)$
- $= \left(\frac{c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{2ab}\right) . \left(\frac{(a^2 + 2ab + b^2) - c^2}{2ab}\right)$

Prova da Fórmula de Heron

$$\boxed{\frac{4A^2}{a^2b^2} = \left(\frac{c^2-(a^2-2ab+b^2)}{2ab}\right)\cdot\left(\frac{(a^2+2ab+b^2)-c^2}{2ab}\right)}$$

$$= \left(\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\right)\cdot\left(\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$= \frac{(c-(a-b))(c+(a-b))}{2ab}\cdot\frac{((a+b)-c)((a+b)+c)}{2ab}$$

$$= \frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{2ab}\cdot\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab}$$

Lembrando que $2s = a+b+c$, temos

$\boxed{2s-2a = -a+b+c}$, $\boxed{2s-2b = a-b+c}$,

$\boxed{2s-2c = a+b-c}$

Daí, $\dfrac{4A^2}{a^2b^2} = \dfrac{(2s-2a)(2s-2b)}{2ab}\cdot\dfrac{(2s-2c)(2s)}{2ab}$

Prova da Fórmula de Heron

$$\boxed{\frac{4A^2}{a^2b^2} = \frac{(2s-2a)(2s-2b)}{2ab} \cdot \frac{(2s-2c)(2s)}{2ab}}$$

$$= \frac{2(s-a)2(s-b)}{2ab} \cdot \frac{2(s-c)2(s)}{2ab}$$
$$= \frac{4(s-a)(s-b)}{2ab} \cdot \frac{4(s-c)s}{2ab}$$
$$= \frac{2(s-a)(s-b)}{ab} \cdot \frac{2(s-c)s}{ab}$$
$$= \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)s}{a^2b^2}$$

Daí, $\frac{4A^2}{a^2b^2} = \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)s}{a^2b^2}$ e

$$\boxed{A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s}}$$