Lei dos Cossenos / Lei dos Senos

Prof. Márcio Nascimento

marcio@matematicauva.org

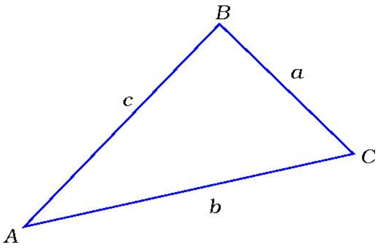
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática Básica II - 2016.2

16 de maio de 2017

Sumário

Sumário

Ângulos Agudos



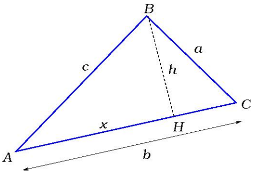
Lei dos Cossenos

Para um triângulo ABC com lados a, b, c opostos aos vértices A, B, C respectivamente, tem-se

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\widehat{A}$$

Lei dos Cossenos - Ângulo Agudo

Provemos a veracidade desta afirmação para ângulos agudos.

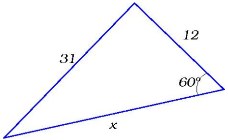


- $a^2 = (c.\text{sen}\widehat{A})^2 + (b - c.\cos\widehat{A})^2$
- $a^2 = c^2.\text{sen}^2(\widehat{A}) + b^2 - 2bc\cos\widehat{A} + c^2.\cos^2(\widehat{A})$
- $a^2 = [c^2.\text{sen}^2(\widehat{A}) + c^2.\cos^2(\widehat{A})] + b^2 - 2bc\cos\widehat{A}$
- $\boxed{a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$

- $h = c.\text{sen}\widehat{A}$
- $x = c.\cos\widehat{A}$
- $a^2 = h^2 + (b - x)^2$

Lei dos Cossenos - Ângulo Agudo

EXEMPLO: Determine x.

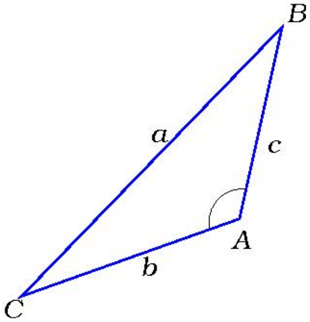


- $a = 31$
- $b = 12$
- $\widehat{A} = 60^0$

- $a^2 = b^2 + x^2 - 2b.x.\cos 60^0$
- $31^2 = 12^2 + x^2 - 2.12.x.\dfrac{1}{2}$
- $961 = 144 + x^2 - 12x$
- $x^2 - 12x - 817 = 0$
- $\Delta = (-12)^2 - 4.1.(-817) = 3412 = 2^2.853$
- $x = \dfrac{12 \pm 2\sqrt{853}}{2}$
- Como se trata de uma medida, $x = 6 + \sqrt{853} \cong \underline{35,2}$

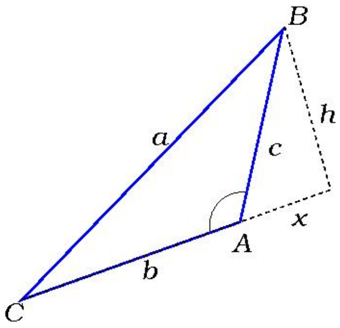
Lei dos Cossenos - Ângulo Obtuso

Agora, vamos verificar que a Lei vale também para ângulos obtusos.

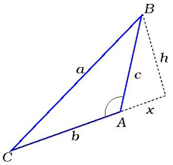


Lei dos Cossenos - Ângulo Obtuso

Agora, vamos verificar que a Lei vale também para ângulos obtusos.



Lei dos Cossenos - Ângulo Obtuso

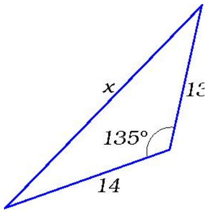


- $h = c.\mathrm{sen}(\pi - \widehat{A}) = c.\mathrm{sen}\widehat{A}$
- $x = c.\cos(\pi - \widehat{A}) = -c.\cos\widehat{A}$
- $a^2 = h^2 + (b + x)^2$

- $a^2 = (c.\mathrm{sen}\widehat{A})^2 + (b - c.\cos\widehat{A})^2$
- $a^2 = c^2.\mathrm{sen}^2(\widehat{A}) + b^2 - 2bc\cos\widehat{A} + c^2.\cos^2(\widehat{A})$
- $a^2 = [c^2.\mathrm{sen}^2(\widehat{A}) + c^2.\cos^2(\widehat{A})] + b^2 - 2bc\cos\widehat{A}$
- $\boxed{a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$

Lei dos Cossenos - Ângulo Obtuso

EXEMPLO: Determine x.



- $x^2 = 14^2 + 13^2 - 2.14.13.\cos 135^0$
- $x^2 = 196 + 169 - 364.(-\cos 45^0)$
- $x^2 = 365 + 364.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $x^2 = 365 + 182.\sqrt{2}$
- $x \cong 24,94$

Lei dos Cossenos

EXERCÍCIO: As diagonais de um paralelogramo medem 24.2cm e 35.4cm, e se intersectam formando um angulo de 65.5^0. Encontre a medida do lado menor do paralelogramo.

Lei dos Cossenos

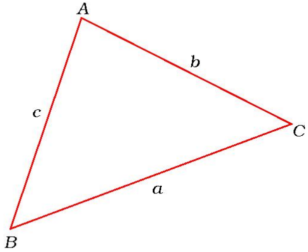
EXERCÍCIO: Resolva o triângulo $a = 412$, $b = 342$, $\widehat{C} = 151.5^0$

Lei dos Cossenos

EXERCÍCIO: Dois aviões deixam um aeroporto ao mesmo tempo. Suas velocidades são 130 milhas por hora e 150 milhas por hora. O ângulo entre seus cursos é de 36^0. Depois de uma hora e meia, qual a distância entre os dois aviões?

Sumário

Lei dos Senos

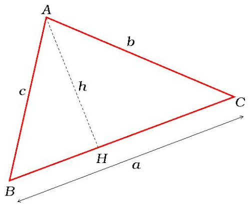


Lei dos Senos

Para um triângulo ABC com lados a, b, c *opostos aos vértices* A, B, C *respectivamente, tem-se*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$

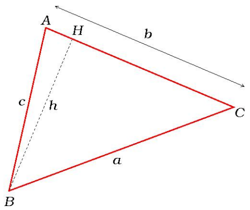
Lei dos Senos



- $2.Area(\Delta ABC) = a.c.\text{sen}\widehat{B}$
- $2b.Area(\Delta ABC) = a.b.c.\text{sen}\widehat{B}$
- $\dfrac{b}{\text{sen}\widehat{B}} = \dfrac{abc}{2.Area(\Delta ABC)}$

- $Area(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}a.h$
- $Area(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}a.(c.\text{sen}\widehat{B})$

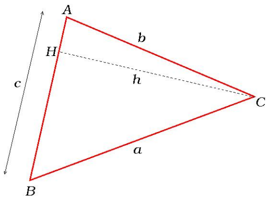
Lei dos Senos



- $2.Area(\Delta ABC) = b.a.\mathrm{sen}\,\widehat{C}$
- $2c.Area(\Delta ABC) = a.b.c.\mathrm{sen}\,\widehat{C}$
- $\dfrac{c}{\mathrm{sen}\,\widehat{C}} = \dfrac{abc}{2.Area(\Delta ABC)}$

- $Area(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}b.h$
- $Area(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}b.(a.\mathrm{sen}\,\widehat{C})$

Lei dos Senos



- $2.Area(\Delta ABC) = b.c.\text{sen}\widehat{A}$
- $2a.Area(\Delta ABC) = a.b.c.\text{sen}\widehat{A}$
- $\dfrac{a}{\text{sen}\widehat{A}} = \dfrac{abc}{2.Area(\Delta ABC)}$

- $Area(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}c.h$
- $Area(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}c.(b.\text{sen}\widehat{A})$

Lei dos Senos

Lei dos Senos

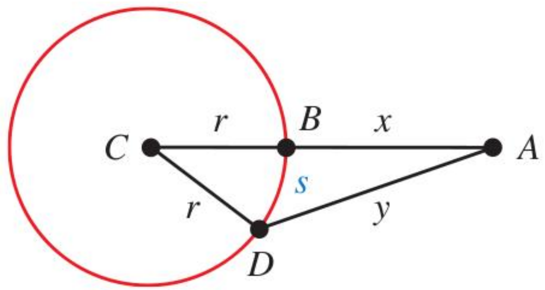
Para um triângulo ABC com lados a, b, c opostos aos vértices A, B, C respectivamente, tem-se

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$

Exercício

Resolva o triângulo $\widehat{A} = 42.5^0$, $\widehat{B} = 71.4^0$, $a = 215cm$

Lei dos Senos



Exercício

Se $\widehat{A} = 31^0$, $s = 11$ *e* $r = 12$, *encontre* x *e* y.

Lei dos Senos

Exercício

Um homem está voando de balão em linha reta com velocidade constante de 5 pés por segundo, mantendo uma altitude constante. Quando ele avista o estacionamento de um supermercado, ele nota que o ângulo de depressão do balão ao carro de um amigo que está nesse estacionamento é de 35^0. *Um minuto e meio depois, depois de sobrevoar o carro de seu amigo, ele olha para trás e vê o amigo entrando no carro, constatando que o ângulo de depressão agora é de* 36^0. *Nesse instante, qual a distância entre as duas pessoas?*

Lei dos Senos

Exercício

Mostre que em qualquer triângulo vale a relação

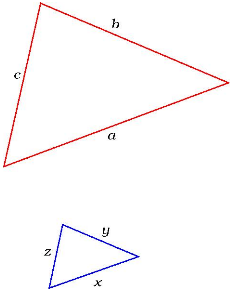
$$\operatorname{sen}\widehat{A} < \operatorname{sen}\widehat{B} + \operatorname{sen}\widehat{C}$$

- Se A, B, C são os vértices e a, b, c, respectivamente, os lados opostos aos vértices, então, pela lei dos senos, tem-se

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$

- Daí, o triângulo com lados $x = \operatorname{sen}\widehat{A}$, $y = \operatorname{sen}\widehat{B}$ e $z = \operatorname{sen}\widehat{C}$ é semelhante ao triângulo ΔABC

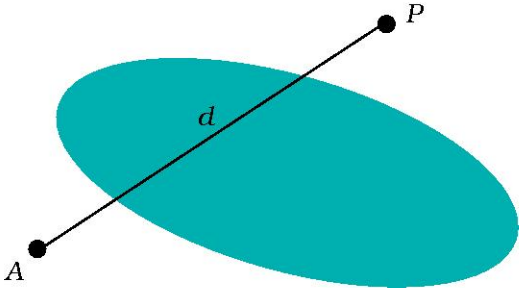
Lei dos Senos



- Como em todo triângulo, a medida de um lado é SEMPRE menor que a soma dos outros dois lados, temos:
- $x < y + z$, $y < x + z$ e $z < x + y$, ou seja
- $\operatorname{sen}\widehat{A} < \operatorname{sen}\widehat{B} + \operatorname{sen}\widehat{C}$
- $\operatorname{sen}\widehat{B} < \operatorname{sen}\widehat{C} + \operatorname{sen}\widehat{A}$
- $\operatorname{sen}\widehat{C} < \operatorname{sen}\widehat{A} + \operatorname{sen}\widehat{B}$

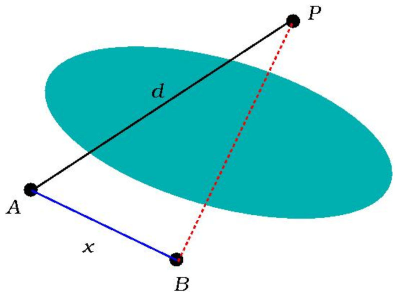
Sumário

Cálculo de distância inacessível



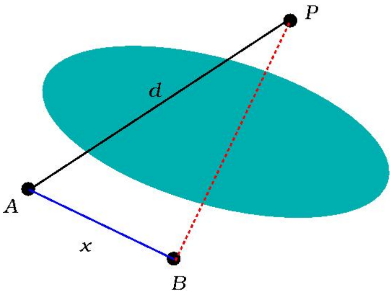
Suponha que se queira calcular a distância d de A a P, considerando que não há como fazer a medida diretamente.

Cálculo de distância inacessível



- Determina-se o ponto auxiliar B, de modo que a distância x, entre A e B, possa ser calculada diretamente.
- Desta forma, construiu-se o triângulo ΔABP e os ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{P}$ podem ser determinados.

Cálculo de distância inacessível



- Pela Lei dos Senos:

$$\frac{x}{\operatorname{sen}\widehat{P}} = \frac{d}{\operatorname{sen}\widehat{B}}$$

- e portanto,

$$d = \frac{x.\operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen}\widehat{P}}$$