Fórmulas da Soma e da Diferença

Prof. Márcio Nascimento

marcio@matematicauva.org

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática Básica II - 2016.2

25 de abril de 2017

Sumário

1. Cosseno da Soma
2. Cosseno da Diferença
3. Seno da Soma
4. Seno da Diferença
5. Tangente da Soma e da Diferença
6. Cotangente da Soma e da Diferença
7. Secante e Cossecante da Soma e da Diferença
8. Exercícios

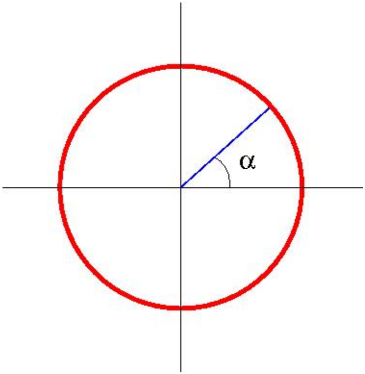
Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

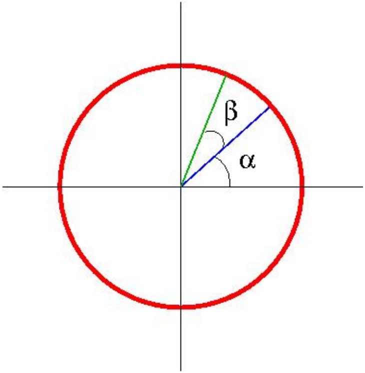
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \mathrm{sen}\alpha . \mathrm{sen}\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha . \cos\beta + \mathrm{sen}\alpha . \mathrm{sen}\beta$
- $\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \mathrm{sen}\alpha . \cos\beta + \mathrm{sen}\beta . \cos\alpha$
- $\mathrm{sen}(\alpha - \beta) = \mathrm{sen}\alpha . \cos\beta - \mathrm{sen}\beta . \cos\alpha$

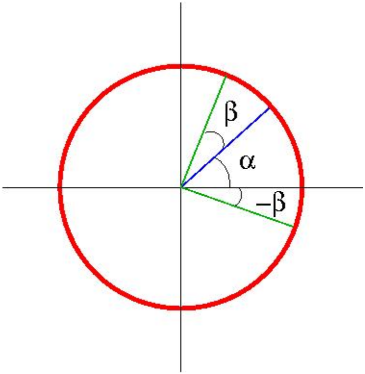
Sumário

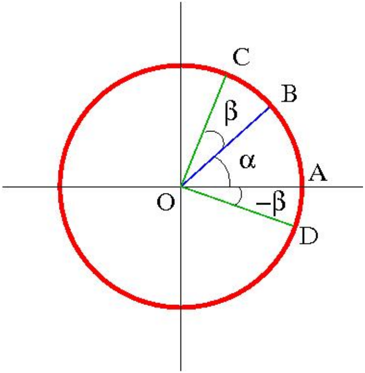
1. Cosseno da Soma
2. Cosseno da Diferença
3. Seno da Soma
4. Seno da Diferença
5. Tangente da Soma e da Diferença
6. Cotangente da Soma e da Diferença
7. Secante e Cossecante da Soma e da Diferença
8. Exercícios

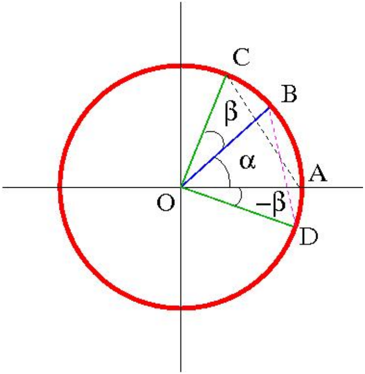
Considere o Ciclo Trigonométrico.




β
α


β
α
−β


C
B
β
α
A
O
−β
D



- Semelhança de triângulos:

  $A\hat{O}C = D\hat{O}B$

  $AO = BO = CO = DO$

  $\therefore \Delta AOC \equiv \Delta DOB$ e

  $d(A,C) = d(B,D)$

- Coordenadas:

  $A = (1,0)$

  $B = (\cos\alpha, \mathrm{sen}\alpha)$

  $C = (\cos(\alpha+\beta), \mathrm{sen}(\alpha+\beta))$

  $D = (\cos(-\beta), \mathrm{sen}(-\beta))$

$$d(A,C) = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$
$$d(B,D) = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2}$$

$$d(A,C) = d(B,D)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2}$$

$\Leftrightarrow$ $(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2$

$\Leftrightarrow$ $(1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + (0 - \mathrm{sen}(\alpha+\beta))^2 =$
$(\cos\alpha - \cos(-\beta))^2 + (\mathrm{sen}\alpha - \mathrm{sen}(-\beta))^2$

$\Leftrightarrow$ $(1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + \mathrm{sen}^2(\alpha+\beta) =$
$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\mathrm{sen}\alpha + \mathrm{sen}\beta)^2$

$\Leftrightarrow$ $1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \mathrm{sen}^2(\alpha+\beta) =$
$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha.\cos\beta + \cos^2\beta + \mathrm{sen}^2\alpha + 2\mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}\beta + \mathrm{sen}^2\beta$

$\Leftrightarrow$ $2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha.\cos\beta + 2\mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}\beta$

$\Leftrightarrow$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}\beta$

Sumário

1. Cosseno da Soma
2. Cosseno da Diferença
3. Seno da Soma
4. Seno da Diferença
5. Tangente da Soma e da Diferença
6. Cotangente da Soma e da Diferença
7. Secante e Cossecante da Soma e da Diferença
8. Exercícios

Vimos que

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}\beta$$

- Lembremos que a função seno é ímpar $(\mathrm{sen}(-x)=-\mathrm{sen}x)$ e que a função cosseno é par $(\cos(-x)=\cos x)$. Daí
$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos(\alpha+(-\beta))\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)-\mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}\beta\end{aligned}$$
Ou seja,
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}\beta$$

Sumário

1. Cosseno da Soma
2. Cosseno da Diferença
3. Seno da Soma
4. Seno da Diferença
5. Tangente da Soma e da Diferença
6. Cotangente da Soma e da Diferença
7. Secante e Cossecante da Soma e da Diferença
8. Exercícios

Sejam α e β dois ângulos quaisquer. Considere $x = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ e apliquemos o cosseno da diferença para os ângulos x e β

$$
\begin{aligned}
\cos(x - \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) \\
&= \cos\frac{\pi}{2}.\cos(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}.\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\
&= \operatorname{sen}(\alpha + \beta)
\end{aligned}
$$

- Portanto, $\cos(x - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ (I)

Por outro lado

$$\begin{aligned}\cos(x-\beta) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{sen}\beta\end{aligned}$$

$$= \left[\cos\frac{\pi}{2}.\cos\alpha + \mathrm{sen}\frac{\pi}{2}.\mathrm{sen}\alpha\right]\cos\beta + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{sen}\beta$$

$$\begin{aligned}&= \mathrm{sen}\alpha.\cos\beta + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{sen}\beta\\ &= \mathrm{sen}\alpha.\cos\beta + \mathrm{sen}x.\mathrm{sen}\beta\end{aligned}$$

- E assim, $\cos(x-\beta) = \mathrm{sen}\alpha.\cos\beta + \mathrm{sen}x.\mathrm{sen}\beta$ (II)

Mais ainda, pela Relação Fundamental para o ângulo x, temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen} x &= \pm\sqrt{1-\cos^2 x} \\
&= \pm\sqrt{1-\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2} \\
&= \pm\sqrt{1-\left[\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}.\mathrm{sen}\alpha\right]^2} \\
&= \pm\sqrt{1-[\mathrm{sen}\alpha]^2} \\
&= \cos\alpha
\end{aligned}$$

- Ou seja, $\mathrm{sen} x = \cos\alpha$ (III)

De

$$\cos(x-\beta) = \mathrm{sen}(\alpha+\beta) \qquad (I)$$

$$\cos(x-\beta) = \mathrm{sen}\alpha.\cos\beta + \mathrm{sen}x.\mathrm{sen}\beta \qquad (II)$$

$$\mathrm{sen}x = \cos\alpha \qquad (III)$$

Temos

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\alpha.\cos\beta + \mathrm{sen}x.\mathrm{sen}\beta \qquad \text{[igualando (I) e (II)]}$$

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\mathrm{sen}\beta \qquad \text{[substituindo (III)]}$$

Sumário

1. Cosseno da Soma
2. Cosseno da Diferença
3. Seno da Soma
4. Seno da Diferença
5. Tangente da Soma e da Diferença
6. Cotangente da Soma e da Diferença
7. Secante e Cossecante da Soma e da Diferença
8. Exercícios

Como já sabemos,

$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\text{sen}\beta$$

Portanto

$$\text{sen}(\alpha+(-\beta))=\text{sen}\alpha.\cos(-\beta)+\cos\alpha.\text{sen}(-\beta)$$

- Sendo o cosseno par e o seno ímpar, temos:

$$\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\text{sen}\beta$$

Sumário

1. Cosseno da Soma
2. Cosseno da Diferença
3. Seno da Soma
4. Seno da Diferença
5. Tangente da Soma e da Diferença
6. Cotangente da Soma e da Diferença
7. Secante e Cossecante da Soma e da Diferença
8. Exercícios

Usando o fato de que

$$tgx = \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x}$$

Então, onde for possível,

- $tg(\alpha - \beta) = \dfrac{\mathrm{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$
- E podemos chegar em

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha . \mathrm{tg}\beta}$$

- Usando que $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \mathrm{tg}(\alpha - (-\beta))$, mostramos que

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha . \mathrm{tg}\beta}$$

Sumário

1 Cosseno da Soma

2 Cosseno da Diferença

3 Seno da Soma

4 Seno da Diferença

5 Tangente da Soma e da Diferença

6 Cotangente da Soma e da Diferença

7 Secante e Cossecante da Soma e da Diferença

8 Exercícios

Usando o fato de que

$$\mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen} x}$$

Deduza expressões para

$$\mathrm{cotg}(\alpha + \beta)$$

$$\mathrm{cotg}(\alpha - \beta)$$

Em função, apenas, de $\mathrm{cotg}\alpha$ e $\mathrm{cotg}\beta$.

Sumário

1. Cosseno da Soma
2. Cosseno da Diferença
3. Seno da Soma
4. Seno da Diferença
5. Tangente da Soma e da Diferença
6. Cotangente da Soma e da Diferença
7. Secante e Cossecante da Soma e da Diferença
8. Exercícios

Tente produzir fórmulas para

$$\sec(\alpha + \beta)$$

$$\sec(\alpha - \beta)$$

$$\operatorname{cossec}(\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{cossec}(\alpha - \beta)$$

Sumário

1. Cosseno da Soma
2. Cosseno da Diferença
3. Seno da Soma
4. Seno da Diferença
5. Tangente da Soma e da Diferença
6. Cotangente da Soma e da Diferença
7. Secante e Cossecante da Soma e da Diferença
8. Exercícios

Exercícios

Mostrar que

- $\mathrm{sen} 2x = 2\mathrm{sen} x . \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x$
- $\mathrm{tg} 2x = \dfrac{2\mathrm{tg} x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$
- $\mathrm{sen} x = \dfrac{2.\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}$
- $\cos x = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}$

Exercícios - Solução

Mostrar que

$$\mathrm{sen} x = \frac{2.\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen} x &= \frac{\mathrm{sen}\left(2.\dfrac{x}{2}\right)}{1} \\
&= \frac{\mathrm{sen}\left(2.\dfrac{x}{2}\right)}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\mathrm{sen}^2\dfrac{x}{2}} \\
&= \frac{2\mathrm{sen}\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\mathrm{sen}^2\dfrac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Exercícios - Solução

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2.\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$