Funções Trigonométricas - Gráficos

Prof. Márcio Nascimento

marcio@matematicauva.org

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática Básica II - 2016.2

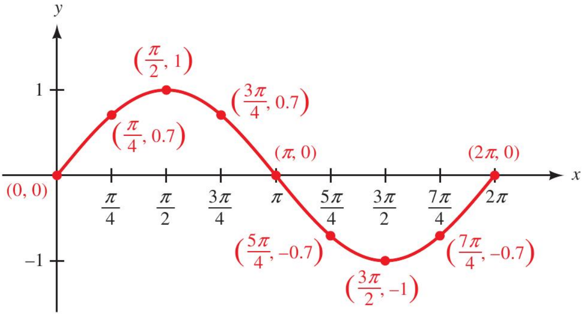
11 de Abril de 2017

Sumário

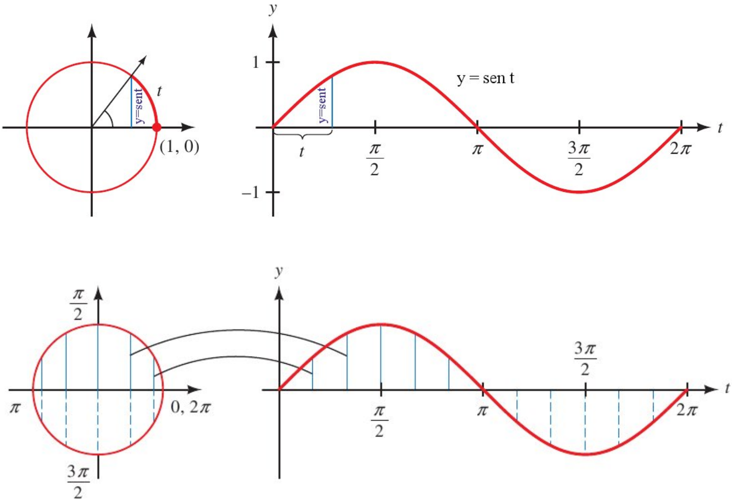
Sumário

Para fazer o gráfico da função $y = \text{sen}x$, começamos fazendo uma tabela de valores de x e y que satisfazem tal equação. Depois, usamos a informação para esboçar o gráfico.

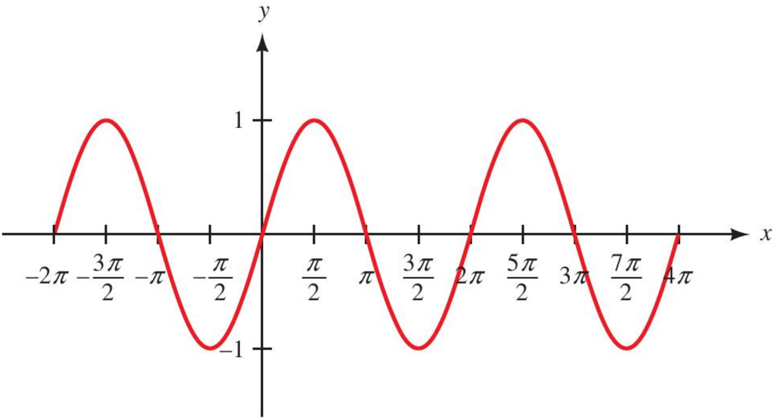
x	$y = \text{sen}x$
0	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
π	0
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
$3\pi/2$	-1
$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
2π	0



Usando o Círculo Unitário

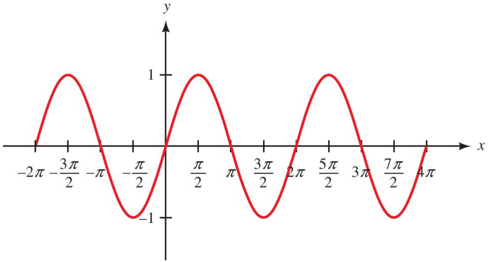


Como já sabemos, o seno é uma função periódica com período igual a 2π, isto é, $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$. Portanto, basta repetir o gráfico visto anteriormente a cada período de 2π.



Amplitude

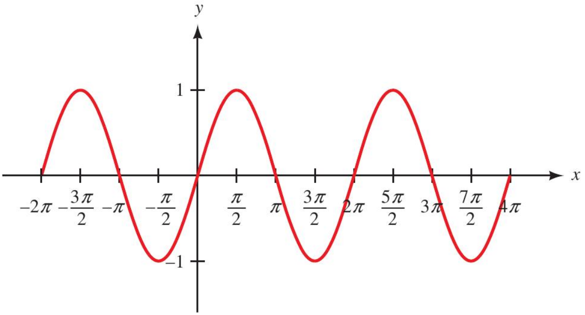
Se M é o maior valor de uma função e m o menor valor da mesma função, então a **Amplitude** de f é definida por: $A = \dfrac{1}{2}|M - m|$



- Portanto, a Amplitude da função seno é $A = \dfrac{1}{2}|1 - (-1)| = 1$.

Zero

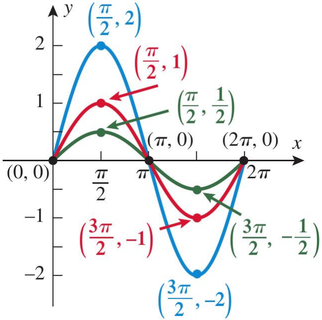
Um **zero** de uma função $y = f(x)$ é um valor c no domínio de f tal que $f(c) = 0$.



- No caso da função seno, os zeros são os números onde o gráfico corta o eixo horizontal, ou seja, $c = k\pi$ onde $k \in \mathbb{Z}$.

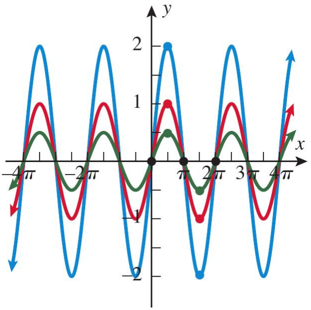
Exemplo: Trace os gráficos das funções $y = \mathrm{sen}x$, $y = 2\mathrm{sen}x$ e $y = \dfrac{1}{2}\mathrm{sen}x$ simultaneamente para $x \in [-4\pi, 4\pi]$

- Para $x \in [0, 2\pi]$:



Exemplo: Trace os gráficos das funções $y = \mathrm{sen} x$, $y = 2\mathrm{sen} x$ e $y = \frac{1}{2}\mathrm{sen} x$ simultaneamente para $x \in [-4\pi, 4\pi]$

Para $x \in [-4\pi, 4\pi]$:

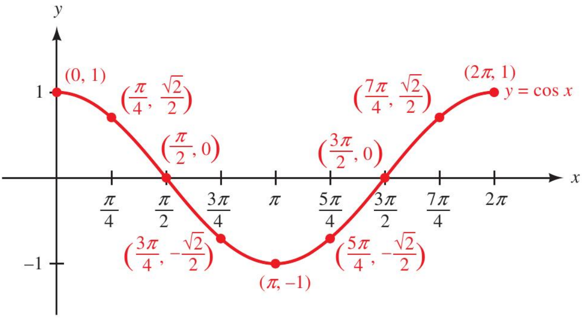


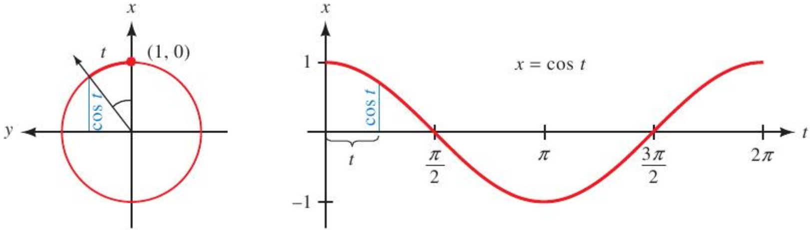
Sumário

Gráfico da Função Cosseno

Assim como no caso da função seno, fazemos uma tabela de valores de x e $y = \cos x$.

x	$y = \cos x$
0	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$	0
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
π	-1
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
$3\pi/2$	0
$7\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
2π	1




x
t
(1, 0)
cos t
y
x
1
x = cos t
cos t
t
π/2
π
3π/2
2π
t
−1

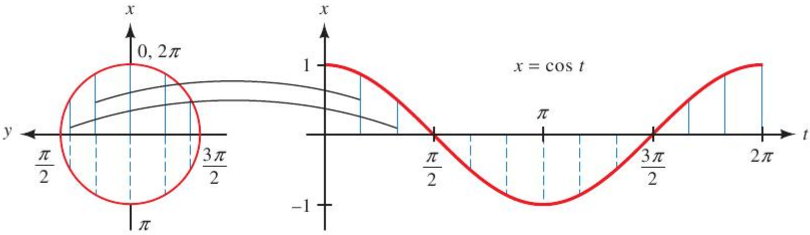
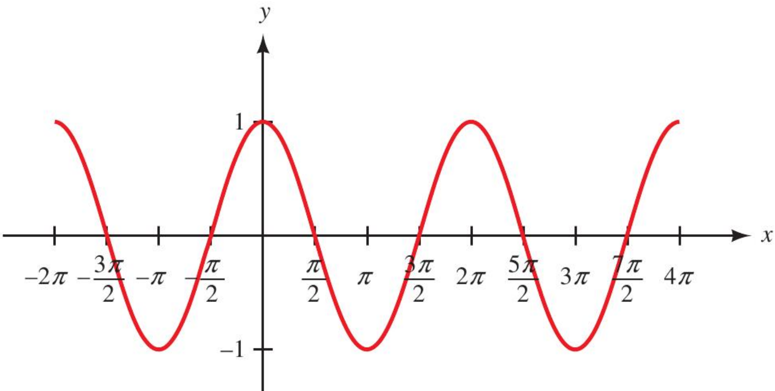
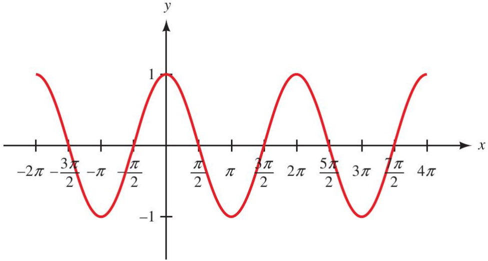

x
0, 2π
y
π/2
3π/2
π
x
1
x = cos t
π
π/2
3π/2
2π
t
−1

Gráfico da Função Cosseno

Como o cosseno também é uma função periódica com período igual a 2π, ou seja, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, basta repetir o gráfico cada período de 2π.



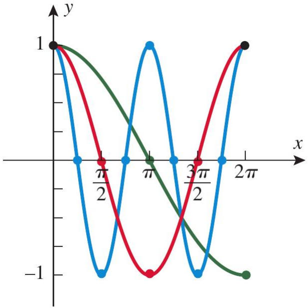
Amplitude e Zeros



- A Amplitude da função cosseno é $A = \dfrac{1}{2}|1-(-1)| = 1$.
- Os zeros do cosseno são os números reais da forma $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

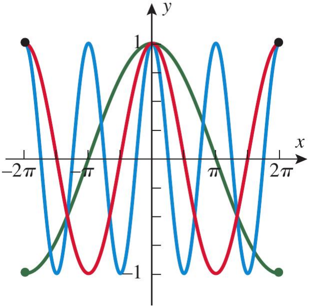
Exemplo: Trace os gráficos das funções $y = \cos x$, $y = \cos 2x$ e $y = \cos \frac{1}{2}x$ simultaneamente para $x \in [-2\pi, 2\pi]$

- Para $x \in [0, 2\pi]$:



Exemplo: Trace os gráficos das funções $y = \cos x$, $y = \cos 2x$ e $y = \cos \frac{1}{2}x$ simultaneamente para $x \in [-2\pi, 2\pi]$

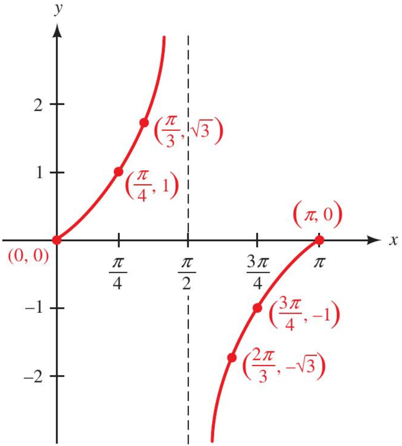
Para $x \in [-2\pi, 2\pi]$:



Sumário

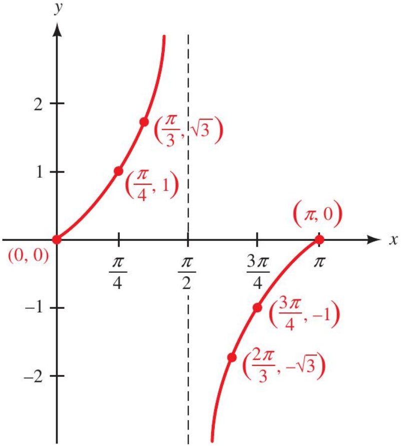
Gráfico da Função Tangente

x	$y = \operatorname{tg} x$
0	0
$\pi/4$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3} \cong 1.7$
$\pi/2$	indefinida
$2\pi/3$	$-\sqrt{3} \cong -1.7$
$3\pi/4$	-1
π	0

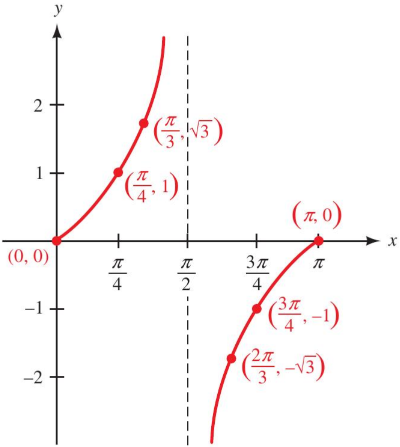


Observemos o que acontece com os valores da tangente quando x se aproxima de $(\pi/2)rad$ (ou 90^0):

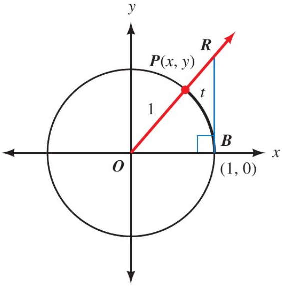
x	$y = \text{tg}x$
89^0	
89.5^0	
89.9^0	
89.99^0	
91^0	
90.5^0	
90.1^0	
90.01^0	
90.001^0	

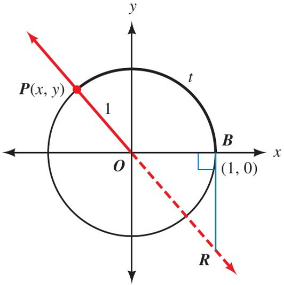


Observemos o que acontece com os valores da tangente quando x se aproxima de $(\pi/2)rad$ (ou 90^0):

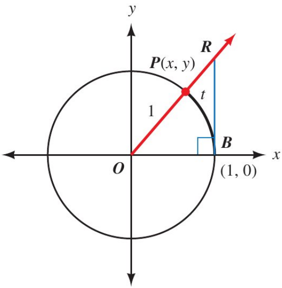


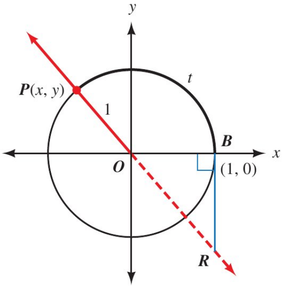
- O gráfico da função tangente não corta nem toca a reta vertical $x = \pi/2$.
- Esta reta é chamada **assíntota**.



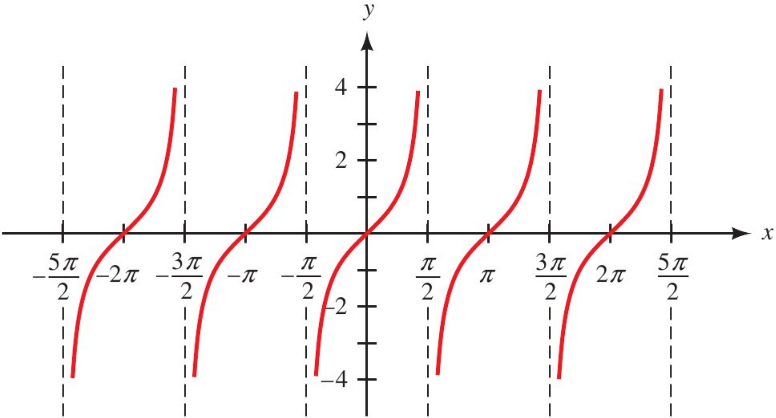


- À medida que t se aproxima de 90^0, os valores da tangente crescem indefinidamente.
- Ao passar de 90^0, a tangente assume grandes valores em módulo, mas negativos! À medida que se distancia de 90^0 e se aproxima de 270^0, a tangente se aproxima de zero, mas sempre negativa.

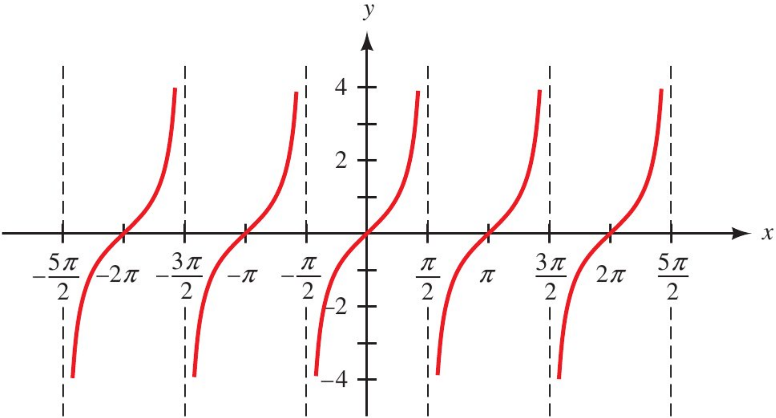




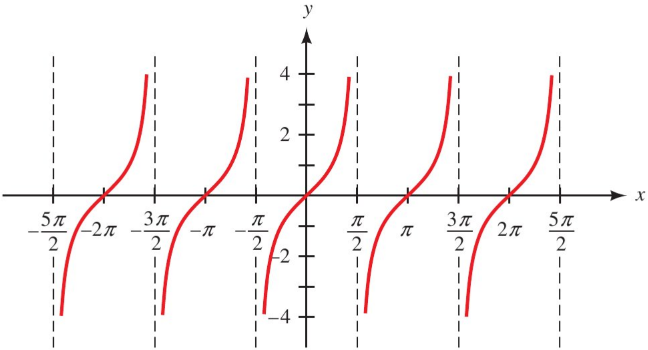
- Quando t passa para o terceiro quadrante, ocorre o mesmo que no primeio quadrante.
- Idem para o quarto quadrante em relação ao segundo quadrante!
- **Assim, vemos que a função tangente tem período π.**



- Portanto, repetindo o que vimos para o intervalo $[0, \pi]$, temos o gráfico da função tangente.



- O que se pode dizer sobre a amplitude e os zeros da função tangente?

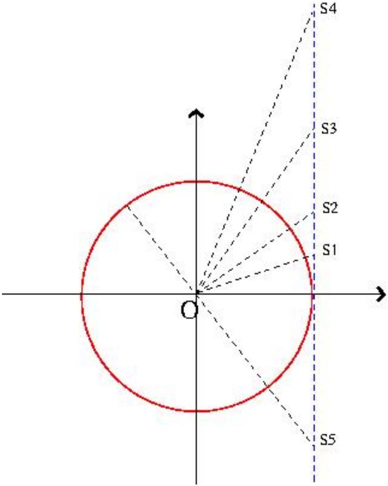


- Não é possível determinar a amplitude e os zeros são os números reais na forma $k\pi$.
- As retas verticais na forma $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ são as assíntotas do gráfico da função tangente.

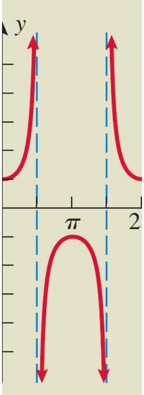
Sumário

Vejamos o que ocorre com $y = \sec x$ para $x \in [0, 2\pi]$.

x	$y = \sec x$
0	
$\pi/4$	
$\pi/2$	
$3\pi/4$	
π	
$5\pi/4$	
$3\pi/2$	
$7\pi/4$	
2π	



Observemos o que acontece com os valores da secante quando x se aproxima de $(\pi/2)rad$ ou $(3\pi/2)rad$:



- O gráfico da função secante não corta nem toca as retas verticais $x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$.
- Estas retas são chamadas **assíntotas verticais** do gráfico da secante.
- A função secante não assume valores no intervalo $[-1, 1]$.
- A função secante não possui zeros.

Periodicidade e Paridade

- Assim como a função cosseno, a função secante é periódica de período 2π:

$$\sec(x+2\pi) = \frac{1}{\cos(x+2\pi)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

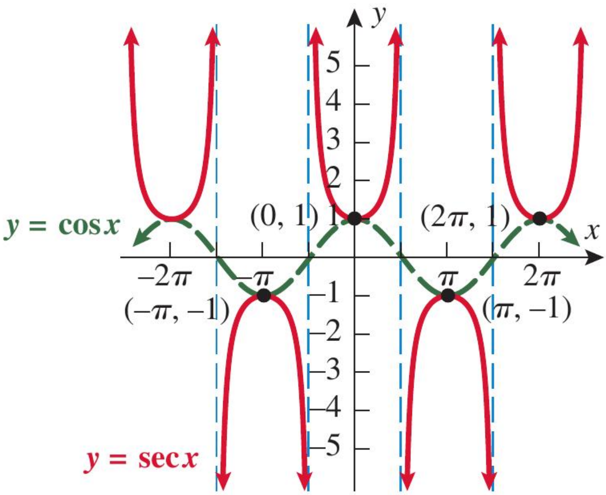
e 2π é o menor valor real para o qual isso ocorre.

- Com relação à paridade, temos:

$$\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

ou seja, a secante é uma função **par**.

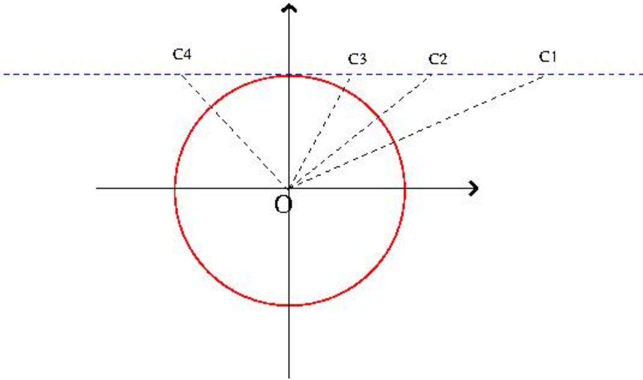
Analisando o gráfico da secante e do cosseno juntos:



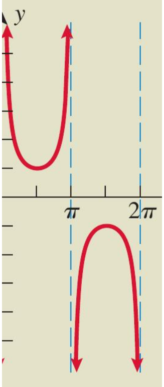
Sumário

Vejamos o que ocorre com $y = \operatorname{cossec} x$ para $x \in [0, 2\pi]$.

x	$y = \operatorname{cossec} x$
0	
$\pi/4$	
$\pi/2$	
$3\pi/4$	
π	
$5\pi/4$	
$3\pi/2$	
$7\pi/4$	
2π	



Observemos o que acontece com os valores da cossecante quando x se aproxima de πrad:



- O gráfico da função cossecante não corta nem toca a reta vertical $x = \pi$.
- Esta reta é chamada **assíntota vertical** do gráfico da cossecante.
- A função cossecante não assume valores no intervalo $[-1, 1]$.
- A função cossecante não possui zeros.

Periodicidade e Paridade

- Assim como a função seno, a função cossecante é periódica de período 2π:

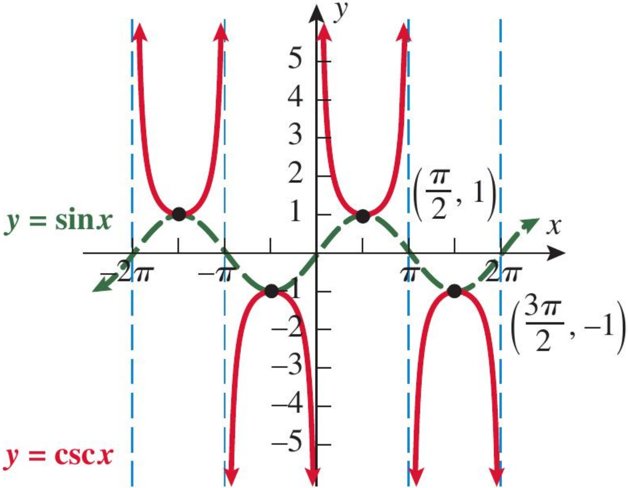
$$\mathrm{cossec}(x+2\pi) = \frac{1}{\mathrm{sen}(x+2\pi)} = \frac{1}{\mathrm{sen}x} = \mathrm{cossec}x$$

  e 2π é o menor valor real para o qual isso ocorre.
- Com relação à paridade, temos:

$$\mathrm{cossec}(-x) = \frac{1}{\mathrm{sen}(-x)} = \frac{1}{-\mathrm{sen}x} = -\mathrm{cossec}x$$

  ou seja, a cossecante é uma função **ímpar**.

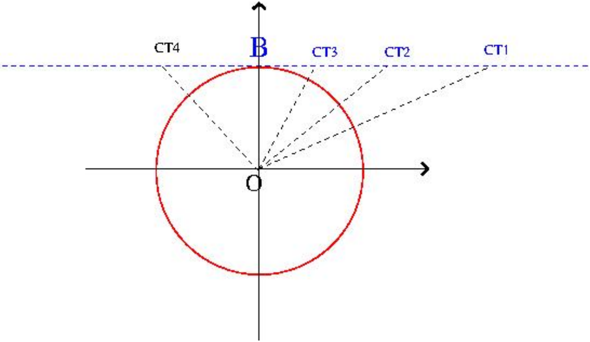
Analisando o gráfico da cossecante e do seno juntos:



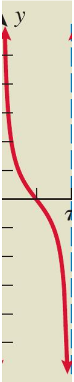
Sumário

Vejamos o que ocorre com $y = \mathrm{cotg}x$ para $x \in [0, \pi]$.

x	$y = \mathrm{cotg}x$
0	
$\pi/6$	
$\pi/3$	
$\pi/2$	
$4\pi/6$	
$5\pi/6$	
π	



Observemos o que acontece com os valores da cotangente quando x se aproxima de O e de πrad:



- O gráfico da função cotangente não corta nem toca as retas verticais $x = 0$ e $x = \pi$.
- Estas retas são chamadas **assíntotas verticais** do gráfico da cotangente.
- A função cotangente assume **todos** os valores reais.
- No intervalo $[0, \pi]$ a função cotagente possui um zero: $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

Periodicidade e Paridade

- Assim como a função tanqente, a função cossecante é periódica de período π:

$$\mathrm{cotg}(x+\pi) = \frac{1}{\mathrm{tg}(x+\pi)} = \frac{1}{\mathrm{tg}x} = \mathrm{cotg}x$$

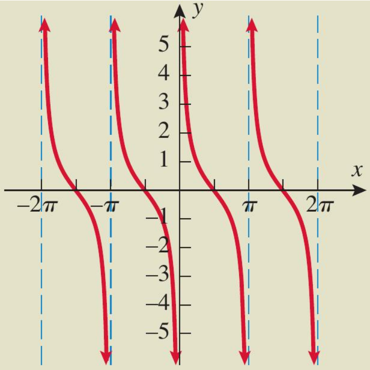
  e π é o menor valor real para o qual isso ocorre.

- Com relação à paridade, temos:

$$\mathrm{cotg}(-x) = \frac{1}{\mathrm{tg}(-x)} = \frac{\cos(-x)}{\mathrm{sen}(-x)} = \frac{\cos x}{-\mathrm{sen}x} = -cotgx$$

  ou seja, a cotangente é uma função **ímpar**.

Gráfico da cotangente:



Zeros: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$