

Radianos

Prof. Márcio Nascimento

`marcio@matematicauva.org`

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática Básica II - 2016.2

18 de março de 2017

Sumário

- 1 Comprimento de Curva
- 2 Medida de ângulo em Radianos
- 3 Radianos e Graus

Sumário

- 1 Comprimento de Curva
- 2 Medida de ângulo em Radianos
- 3 Radianos e Graus

Comprimento de Curva

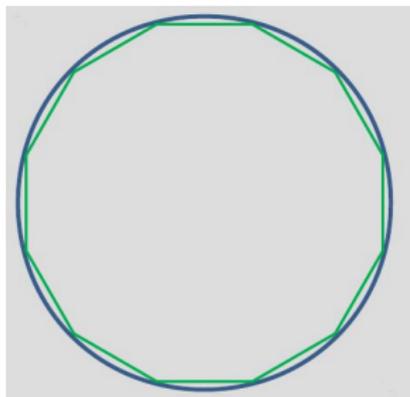
Como calcular o comprimento de uma curva?



- Uma boa tentativa é “esticar” a curva e medir...
- Uma outra maneira é fazer uma aproximação através de poligonais.

Comprimento de Curva

No caso do círculo, em particular, podemos aproximar pelo comprimento de polígonos inscritos



Comprimento de Curva

Doravante, diremos apenas que o comprimento de uma circunferência é C e admitiremos que:

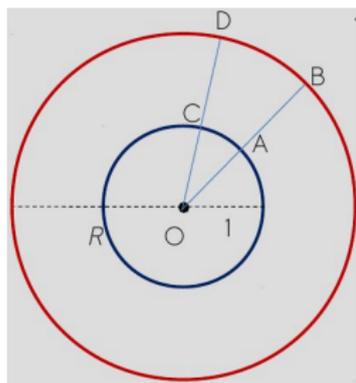
- “O número π é o comprimento de uma semi-circunferência de raio 1”



- Desta forma, o comprimento C de uma circunferência de **raio 1** é o dobro de π , isto é, 2π .

Comprimento de Curva

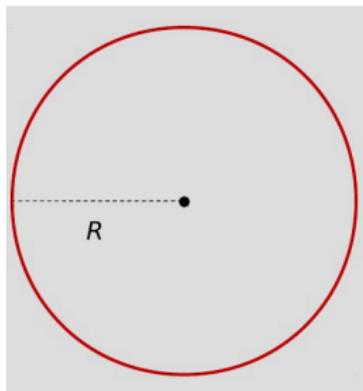
E qual o comprimento de uma circunferência de raio R ?



- $\frac{OA}{\widehat{AC}} = \frac{OB}{\widehat{DB}} \implies \frac{1}{\widehat{AC}} = \frac{R}{\widehat{DB}} \implies \widehat{DB} = \widehat{AC} \cdot R$
- Observe que neste caso, \widehat{DB} e \widehat{AC} denotam medidas de arcos, não segmentos.
- Se considerarmos o arco de toda a circunferência, isto é, o ponto C percorrendo a circunferência no sentido anti-horário até atingir o ponto A , então \widehat{AC} é o comprimento da circunferência de raio 1 e, analogamente, \widehat{DB} o comprimento C da circunferência de raio R , daí:
- $\widehat{DB} = \widehat{AC} \cdot R \iff C = 2\pi R$

Comprimento de Curva

Veja que o número π não depende da circunferência considerada, é um *invariante*:



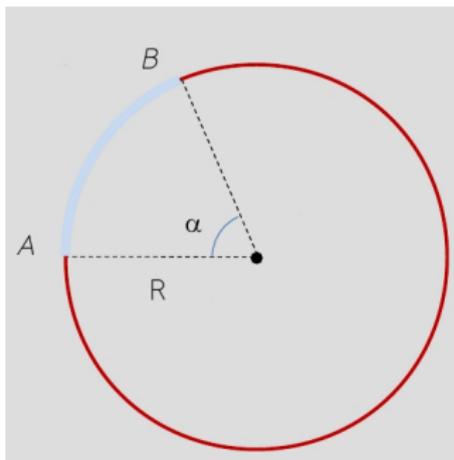
$$C = 2\pi \cdot R \implies \pi = \frac{C}{2R}$$

Sumário

- 1 Comprimento de Curva
- 2 Medida de ângulo em Radianos
- 3 Radianos e Graus

Medida de ângulo em Radianos

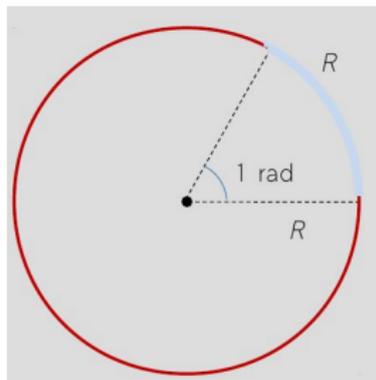
Considere uma circunferência de raio R .



- Dado um ângulo α de vértice O , determina-se um arco \widehat{AB} na circunferência.
- Observe que para cada ângulo α obtido dessa forma, temos um comprimento de arco \widehat{AB} diferente.
- Isso nos permite medir o ângulo α baseado no comprimento de arco \widehat{AB} e no raio R , isto é, podemos dizer que
- $\alpha = \frac{\widehat{AB}}{R}$
- Esta unidade de medida é chamada **radiano**.

Medida de ângulo em Radianos

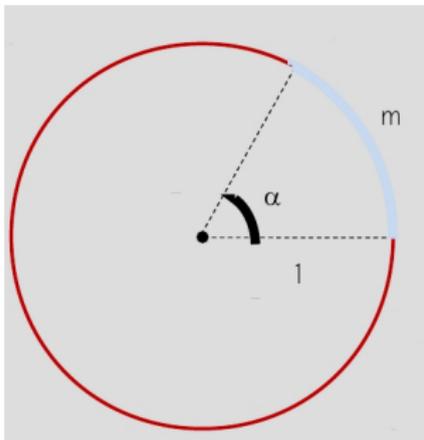
Assim, 1 radiano é o ângulo correspondente ao arco de comprimento $\widehat{AB} = R$, numa circunferência de raio R .



- A palavra radiano vem de raio, uma vez que esta unidade está diretamente ligada ao raio da circunferência.

Medida de ângulo em Radianos

Quando a circunferência tem raio 1, a medida do ângulo em radianos, corresponde (numericamente) a medida do arco determinado pelo ângulo.



- $\alpha = \frac{m}{1} = m$
- Por causa dessa facilidade a circunferência de raio 1 é tão utilizada.

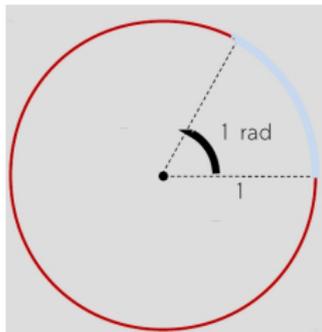
Sumário

- 1 Comprimento de Curva
- 2 Medida de ângulo em Radianos
- 3 Radianos e Graus

Radianos e Graus

Como já sabemos, Radianos e Graus são unidades de medidas para a mesma grandeza: ângulos. Assim, existe uma maneira de passar de uma unidade para a outra.

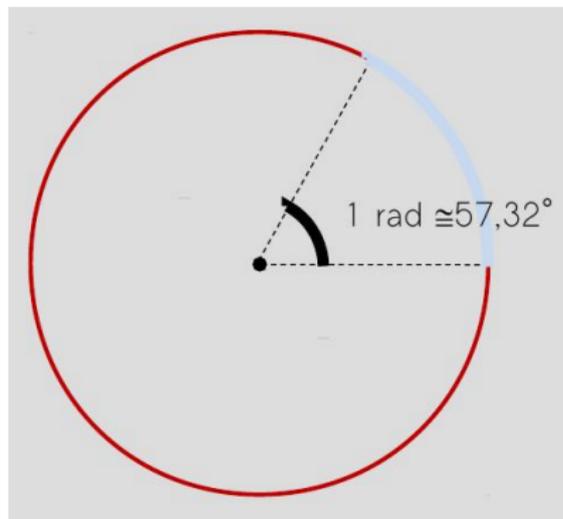
Considere um ângulo de 1rad numa circunferência de raio 1.



- Se considerarmos o ângulo α formado pela abertura completa na circunferência considerada, então, em radianos, $\alpha = 2\pi\text{rad}$.
- Já tínhamos visto que, em graus, $\alpha = 360^\circ$.
- Seja x a medida **em graus** do ângulo 1rad .
- Então: $\frac{x}{1} = \frac{360}{2\pi} \implies x = \frac{180}{\pi}$

Radianos e Graus

Ou seja,

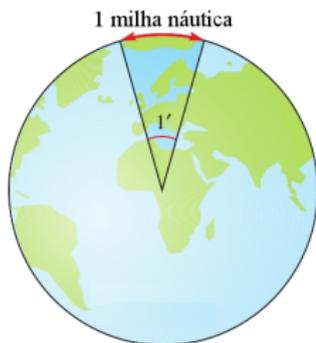


Exemplo

- Expressar em radianos o ângulo de $29^{\circ}25'32''$
- R: $\cong 0,5rad$
- Converta $\frac{4\pi}{3}$ radianos para graus.
- R: 240°
- Um arco de circunferência mede 40cm e seu raio mede 10cm. Calcule a medida do arco em graus e radianos.
- R: $4rad = 229,28^{\circ}$

Exemplo

Milha Náutica: se o ângulo central com vértice no centro da Terra mede $1'$, então o arco na superfície da Terra correspondente a este ângulo (também chamada de distância geodésica) é definida como 1 milha náutica. O raio da Terra é de aproximadamente 6367Km.



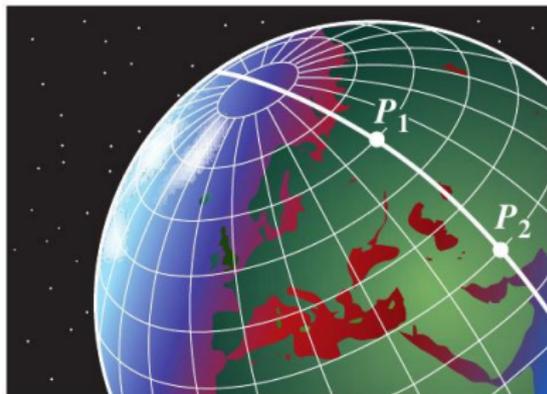
Dois Navios estão separados na superfície terrestre por 70 milhas náuticas. Qual a distância geodésica entre eles?

R: $\cong 0.02rad$ que corresponde a aproximadamente 129,6Km

Exemplo

Distâncias: Considerando um ponto específico no território de cada cidade, podemos estimar as distâncias entre os municípios através da fórmula:

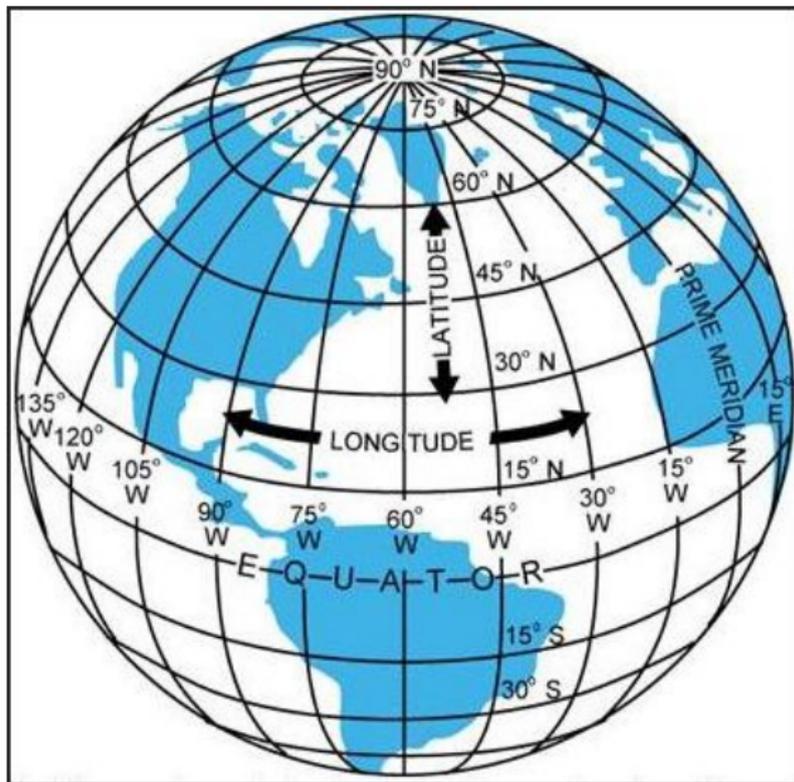
$$R \cdot \arccos[\text{sen}(LT_1) \cdot \text{sen}(LT_2) + \cos(LT_1) \cdot \cos(LT_2) \cdot \cos(LN_1 - LN_2)]$$



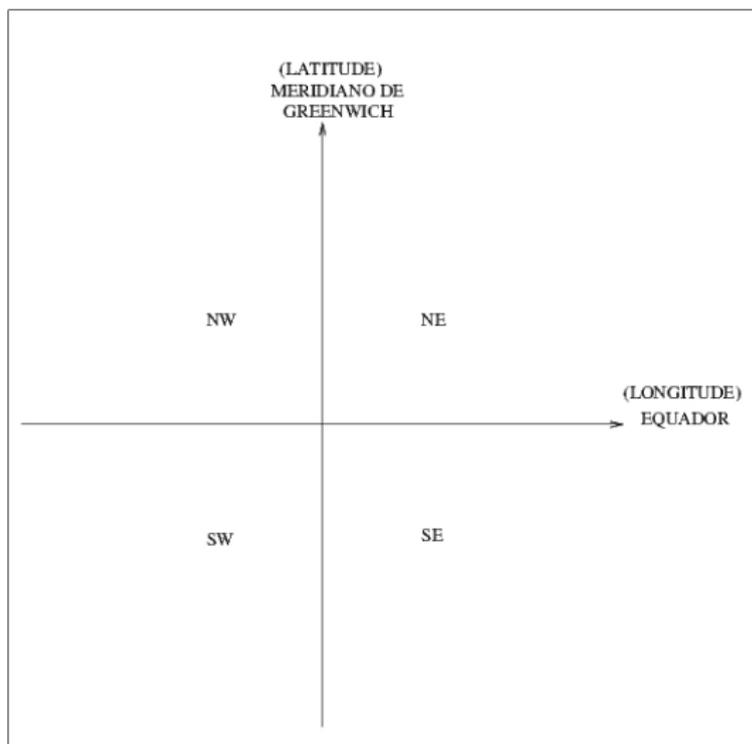
© Cengage Learning

- R: raio da Terra.
- $(LT_1, LN_1), (LT_2, LN_2)$: coordenadas geográficas das cidades 1 e 2 respectivamente.
- A função arco cosseno retorna o valor do ângulo **em radianos**.

Exemplo



Exemplo



Exemplo

A cidade de Canindé-CE tem as seguintes coordenadas geográficas¹:

$$(04^{\circ}21'32'' S, 39^{\circ}18'42'' W) \iff (-04^{\circ}21'32'', -39^{\circ}18'42'')$$

Enquanto Juazeiro do Norte-CE tem como coordenadas geográficas:

$$(07^{\circ}12'47'' S, 39^{\circ}18'55'' W) \iff (-07^{\circ}12'47'', -39^{\circ}18'55'')$$

Transformando os ângulos (em graus) para a notação decimal:

$$\text{Canindé } (LT_1, LN_1) : (-4.358889^{\circ}; -39.311667^{\circ})$$

$$\text{Juazeiro } (LT_2, LN_2) : (-7.213056^{\circ}; -39.315278^{\circ})$$

¹Fonte: <http://www.apolo11.com/>

Exemplo

Admitindo o raio da terra igual a $6371Km$ e aplicando os dados na fórmula, teremos:

- 1 $d = R \cdot \arccos[\text{sen}(LT_1) \cdot \text{sen}(LT_2) + \cos(LT_1) \cdot \cos(LT_2) \cdot \cos(LN_1 - LN_2)]$
- 2 $d = 6371 \cdot \arccos[\text{sen}(-4.358889^0) \cdot \text{sen}(-7.213056^0) + \cos(-4.358889^0) \cdot \cos(-7.213056^0) \cdot \cos(0.003611)]$
- 3 $d = 6371 \cdot \arccos[(-0.076004) \cdot (-0.125559) + (0.997108) \cdot (0.992086) \cdot (1)]$
- 4 $d = 6371 \cdot \arccos[0.998760] = 6371 \cdot (0.049805) = 317.306035Km$

Exercício:

Camocim: $(02^{\circ}54'08'' S, 40^{\circ}50'28'' W)$

Cariré: $(03^{\circ}57'02'' S, 40^{\circ}28'24'' W)$

Calcular a distância geodésica entre esses municípios. Admita o raio da Terra sendo 6371Km.

$$d = R \cdot \arccos[\sin(LT_1) \cdot \sin(LT_2) + \cos(LT_1) \cdot \cos(LT_2) \cdot \cos(LN_1 - LN_2)]$$

① $d \cong 123,46 Km$