Trigonometria no Triângulo Retângulo

Prof. Márcio Nascimento

marcio@matematicauva.org

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática Básica II - 2016.2

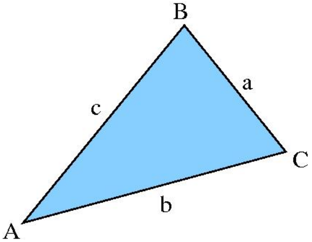
22 de fevereiro de 2017

Sumário

Sumário

Definição

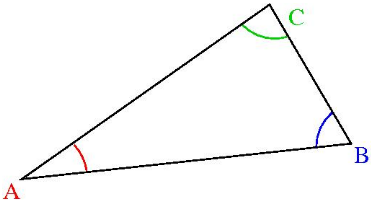
Um triângulo é a figura formada por três pontos não colineares e as *geodésicas* que os ligam na superfície em questão.



- No plano, as geodésicas são as *retas*.
- A, B, C são os vértices.
- a, b, c são os lados.
- $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ são os ângulos internos.

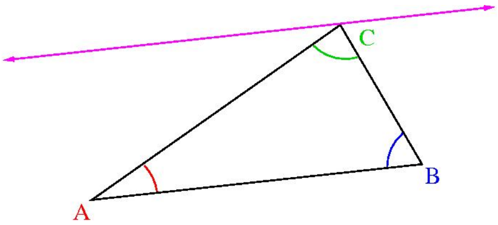
Soma dos Ângulos Internos

A soma dos ângulos internos de um triângulo plano, é sempre igual a um ângulo raso (ou 180^0).



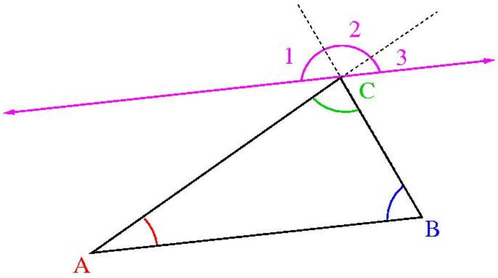
Soma dos Ângulos Internos

De fato, trace por um dos vértices, uma reta paralela ao lado oposto.

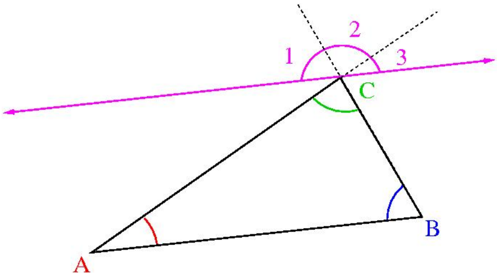


Soma dos Ângulos Internos

Prolongue os lados que formam o ângulo desse vértice. Isso determina os ângulos 1, 2 e 3.

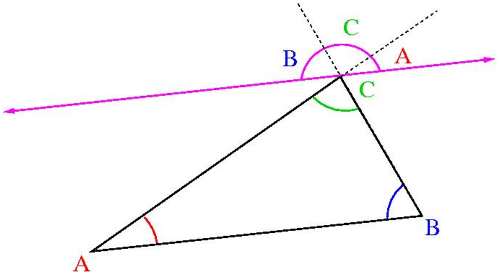


Soma dos Ângulos Internos



- Note que os ângulos $\widehat{C}$ e 2 são *opostos pelo vértice*, portanto, são *iguais*!
- Como o segmento AB é paralelo à reta que passa em C, segue que os ângulos $\widehat{A}$ e 3 são iguais.
- Pelo mesmo motivo, os ângulos $\widehat{B}$ e 1 são iguais.

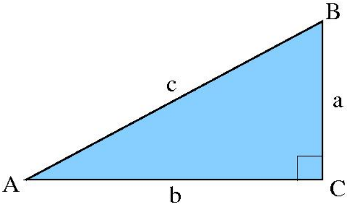
Soma dos Ângulos Internos



- Juntos, os ângulos 1, 2 e 3 formam um ângulo raso.
- Portanto, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$ é um ângulo raso, ou seja, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$

Triângulo Retângulo

Quando um dos ângulos internos é um *ângulo reto*, temos um **Triângulo Retângulo**.



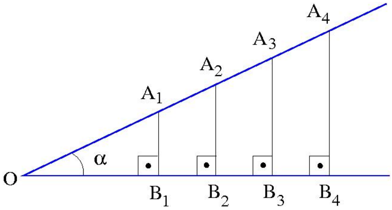
- O lado oposto ao ângulo reto é chamado **HIPOTENUSA**[1].
- Os lados adjacentes ao ângulo reto, são chamados **CATETOS**[2].

[1] Do grego, 'contrário à'.
[2] Do grego, 'que cai perpendicular'.

Sumário

Relações Trigonométricas

Considere um ângulo agudo α e os segmentos paralelos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3...

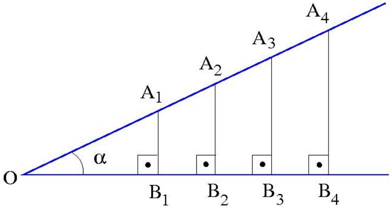


- Os triângulos retângulos A_1OB_1, A_2OB_2, A_3OB_3,... são *semelhantes*.
- Isto é,

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3} = \dots$$

Relações Trigonométricas

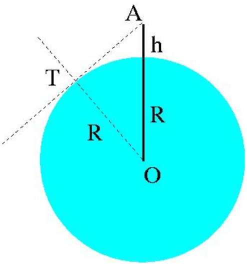
Desta forma, dado um triângulo retângulo com ângulos internos **fixados** existe uma relação entre os seus lados que não depende da medida dos lados.



- Essa relação será chamada **seno do ângulo** α.
- Notação: $\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{AB}{OA}}$ ou $\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}}}$

Aplicação

Cálculo do Raio da Terra: no alto de um farol à beira-mar, por exemplo, podemos estimar o raio da Terra...



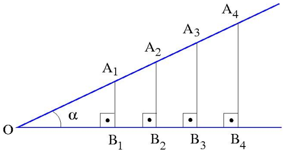
- A altura h do farol (torre) é conhecida.
- O ângulo $\widehat{A}$ formado pela torre e a linha de visão do observador em direção ao horizonte, pode ser medida. Portanto, podemos determinar $\operatorname{sen}\widehat{A}$.
- Usando a relação seno no triângulo retângulo OAT, temos:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{OT}{OA} = \frac{R}{R+h} \Longrightarrow \boxed{R = \frac{h.\operatorname{sen}\widehat{A}}{1-\operatorname{sen}\widehat{A}}}$$

Sumário

Relações Trigonométricas

Assim como no caso da relação seno, a semelhança entre os triângulos abaixo nos dá outras duas relações que também **não** dependem da medida dos lados:

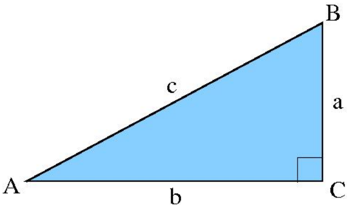


$$\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{OB_3}{OA_3} = \dots$$
$$\frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3} = \dots$$

- Essas relações são, respectivamente, **cosseno** e **tangente**:
- $\boxed{\cos\alpha = \frac{OB}{OA}}$ ou $\boxed{\cos\alpha = \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}}$
- $\boxed{\text{tg}\alpha = \frac{AB}{OB}}$ ou $\boxed{\text{tg}\alpha = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}}}$

RELAÇÃO TANGENTE

IMPORTANTE: Num triângulo retângulo, o valor da tangente de um de seus ângulos pode ser obtida a partir do seno e do cosseno deste ângulo.

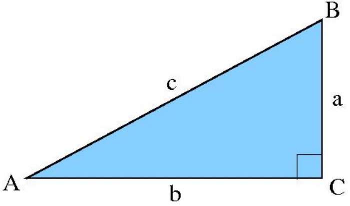


$$tg\,\widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\left(\frac{b}{c}\right)}{\left(\frac{a}{c}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}$$

Portanto, $\boxed{tg\,\widehat{B} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}}$

Sumário

Como um triângulo tem três lados, é possível obter seis razões envolvendo seus lados. Já usamos e “batizamos” três dessas razões (seno, cosseno e tangente). Agora, vejamos as outras três



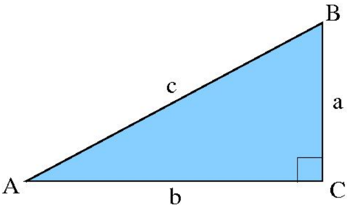
$$\sec \widehat{A} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos \widehat{A}}$$

$$\mathrm{cossec}\widehat{A} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\mathrm{sen}\widehat{A}}$$

$$\mathrm{cotg}\widehat{A} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\mathrm{tg}\widehat{A}}$$

Sumário

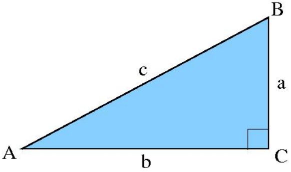
Considerando um triângulo retângulo e um de seus ângulos, digamos, $\widehat{A}$, temos:



- $\operatorname{sen}^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{A} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2}$
- Pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$. Portanto,
- $\boxed{\operatorname{sen}^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{A} = 1}$ $\leftarrow$ RELAÇÃO FUNDAMENTAL

Proposição

Se $\widehat{A}$ *e* $\widehat{B}$ *são ângulos complementares, então* $\mathrm{sen}\widehat{A} = \cos\widehat{B}$, $\mathrm{sen}\widehat{B} = \cos\widehat{A}$ *e* $\mathrm{tg}\widehat{A} = 1/\mathrm{tg}\widehat{B}$



$$\mathrm{sen}\widehat{A} = \frac{a}{c} = \cos\widehat{B}$$

$$\mathrm{sen}\widehat{B} = \frac{b}{c} = \cos\widehat{A}$$

$$\mathrm{tg}\widehat{A} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\mathrm{tg}\widehat{B}}$$

Proposição

Se $\widehat{A}$ *e* $\widehat{B}$ *são ângulos complementares, então* $\sec\widehat{A} = \mathrm{cossec}\widehat{B}$, $\sec\widehat{B} = \mathrm{cossec}\widehat{A}$ *e* $\mathrm{cotg}\widehat{A} = 1/\mathrm{cotg}\widehat{B}$

Proposição

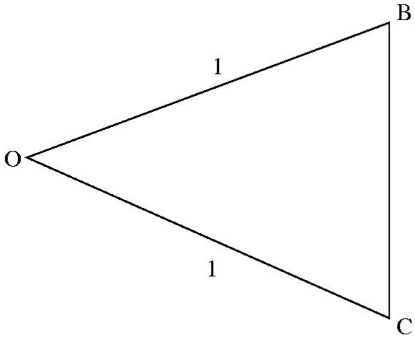
- *Se* α *é um ângulo no intervalo* $(0^0, 45^0)$, *então*

$$\mathrm{sen} 2\alpha = 2.\mathrm{sen}\alpha.\cos\alpha$$

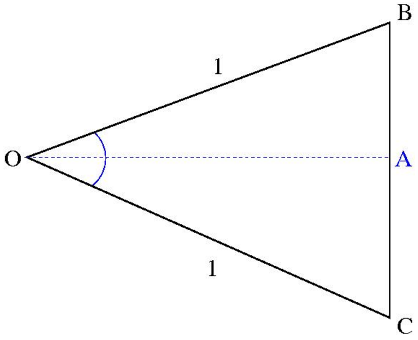
- *Se* x *é um ângulo no intervalo* $(0^0, 90^0)$, *então*

$$\mathrm{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

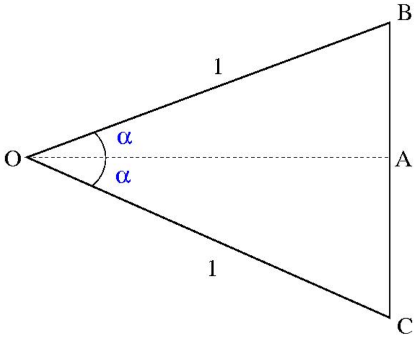
Demonstração (parte 1): Considere um triângulo isósceles onde os lados congruentes medem 1.



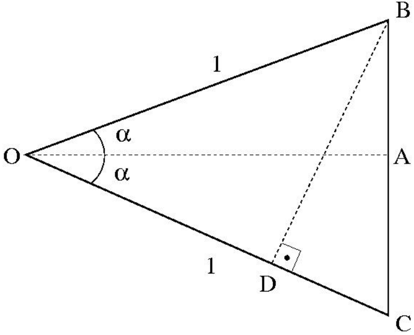
Traçando a bissetriz pelo ângulo no vértice O, determinamos o ponto médio do lado BC, o ponto A.



Vamos chamar de α a medida dos ângulos $B\widehat{O}A$ e $A\widehat{O}C$, que são congruentes.

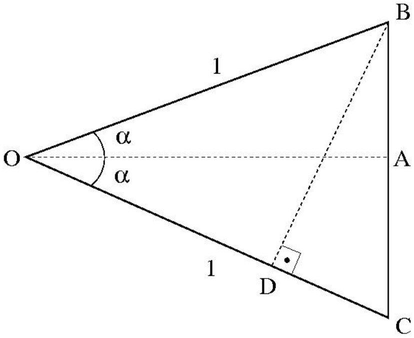


Agora, tracemos a altura relativa ao lado OC. Isso determina o ponto D e BD é uma altura para o triângulo.

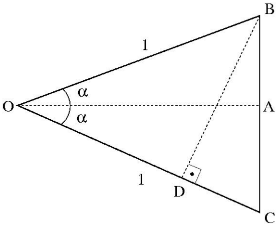


Desta forma, podemos calcular a área do triângulo BOC de duas maneiras:

$$\frac{OA.BC}{2} = \frac{BD.OC}{2}$$



$$\boxed{\frac{OA.BC}{2} = \frac{BD.OC}{2}} (*)$$



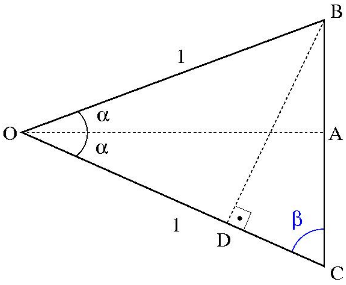
- $\dfrac{OA}{OB} = \cos\alpha \Longrightarrow OA = \cos\alpha$
- $\dfrac{BA}{OB} = \text{sen}\alpha \Longrightarrow BA = \text{sen}\alpha \Longrightarrow BC = 2.\text{sen}\alpha$
- $\dfrac{BD}{OB} = \text{sen}2\alpha \Longrightarrow BD = sen2\alpha$
- Substituindo em (*), temos

$$\frac{\cos\alpha.2.\text{sen}\alpha}{2} = \frac{\text{sen}2\alpha.1}{2}$$

- $\boxed{\text{sen}2\alpha = 2.\cos\alpha.\text{sen}\alpha}$

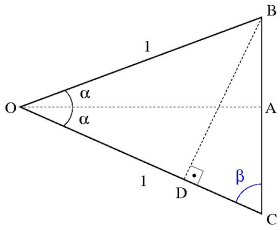
Demonstração (parte 2): Se x é um ângulo no intervalo $(0^0, 90^0)$, então

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$



Vamos considerar o ângulo β no vértice C do triângulo BOC.

$\boxed{OD + DC = 1}(*)$



- $\dfrac{OD}{OB} = \cos 2\alpha \Longrightarrow OD = \cos 2\alpha$
- $\dfrac{DC}{BC} = \cos \beta \Longrightarrow DC = BC.\cos \beta$
- $BC = 2BA, \dfrac{BA}{OB} = \mathrm{sen}\alpha \Longrightarrow BC = 2.sen\alpha$
- Substituindo em (*), temos

$$\cos 2\alpha + BC.\cos \beta = 1$$

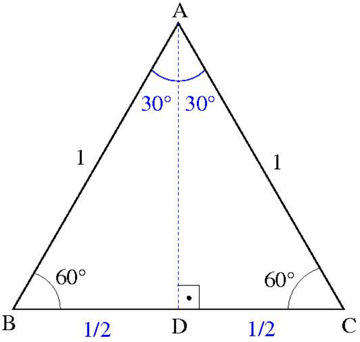
- $\cos 2\alpha + 2.\mathrm{sen}\alpha.\mathrm{sen}\alpha = 1$
- $2.\mathrm{sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

- $\boxed{\mathrm{sen}\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}}$ ou $\boxed{\mathrm{sen}\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}}$

Sumário

Ângulos Especiais: 30^0 e 60^0

Considere um triângulo equilátero de lado 1. A bissetriz do ângulo no vértice em A, coincide com altura relativa ao lado BC e o ponto médio deste mesmo lado.



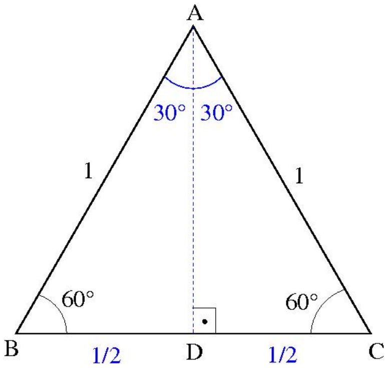
- Pelo Teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

- Isto é, $1 = AD^2 + \dfrac{1}{4}$
- Portanto, $\boxed{AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

Ângulos Especiais: 30^0 **e** 60^0

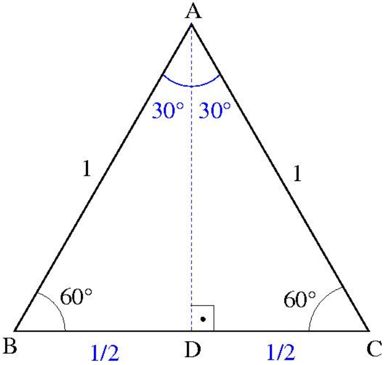
Sendo $AC = 1$, $AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $DC = \dfrac{1}{2}$, temos:



- $\operatorname{sen}30^0 = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30^0 = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{tg}30^0 = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ângulos Especiais: 30^0 **e** 60^0

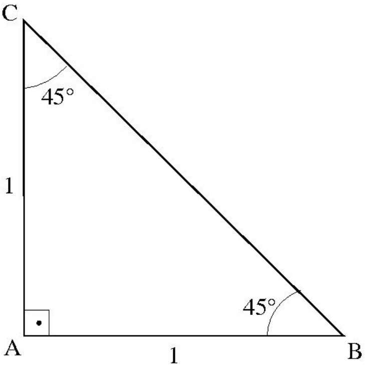
Ademais, sendo 30^0 e 60^0 ângulos complementares, temos:



- $\cos 60^0 = \text{sen}30^0 = \dfrac{1}{2}$
- $\text{sen}60^0 = \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg}60^0 = \dfrac{1}{\text{tg}30^0} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$

Ângulos Especiais: 45^0

Considere um triângulo retângulo isósceles com catetos medindo 1.



- Pelo Teorema de Pitágoras:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

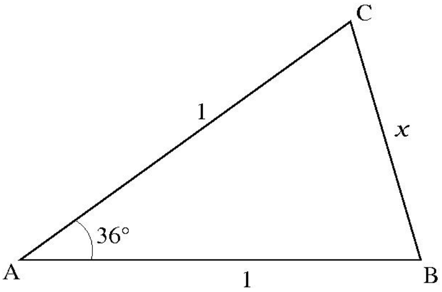
- Isto é, $BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$
- Portanto, $\boxed{BC = \sqrt{2}}$
- $\mathrm{sen} 45^0 = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\mathrm{tg} 45^0 = \dfrac{AC}{AB} = 1$

A Famosa tabela

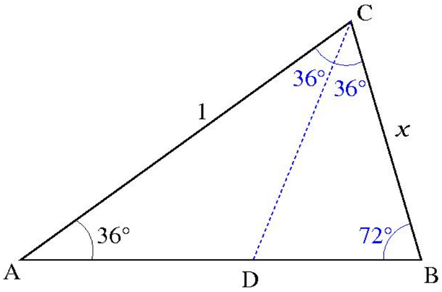
Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Ângulos Especiais: 18^0

Considere um triângulo isósceles cujos lados congruentes medem 1 e que 36^0 é o ângulo formado por tais lados. Obviamente os demais ângulos internos são ambos iguais a 72^0. Seja x o terceiro lado.

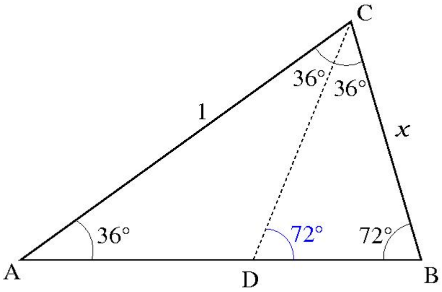


Seja CD a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$.



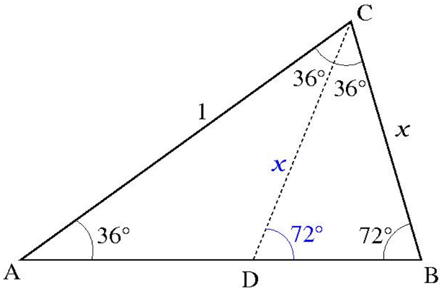
- Veja que os triângulos ABC e CDB são semelhantes!

Seja CD a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$.



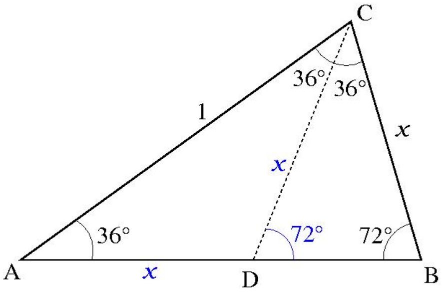
- Veja que os triângulos ABC e CDB são semelhantes!

Seja CD a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$.



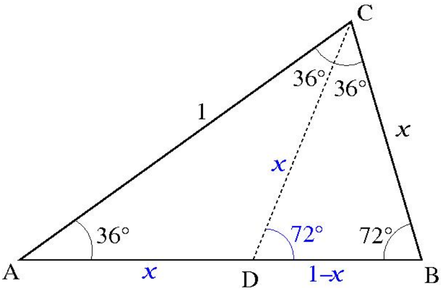
- Veja que os triângulos ABC e CDB são semelhantes!

Seja CD a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$.



- Veja que os triângulos ABC e CDB são semelhantes!

Seja CD a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$.



Veja que os triângulos ABC e CDB são semelhantes!

Daí,

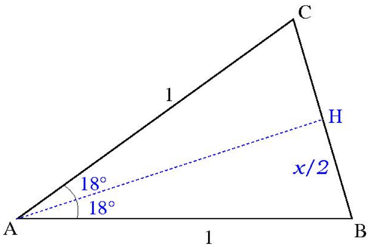
$$\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{DB}$$

isto é, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x}$

ou $x^2 + x - 1 = 0$

Logo, $\boxed{CB = x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Voltando ao triângulo inicial, a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ coincide com a altura relativa ao lado BC e também determina o ponto médio deste lado.



$$\mathrm{sen} 18^0 = \frac{x/2}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos^2 18^0 + \mathrm{sen}^2 18^0 = 1 \Longrightarrow$$

$$\cos 18^0 = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 18^0}$$

isto é, $\cos 18^0 = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$$tg 18^0 = \frac{\mathrm{sen} 18^0}{\cos 18^0} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

Portanto,

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
18^0	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

Sumário

Exercícios

Exercício: Encontre as relações trigonométricas para os ângulos de 9^0, 15^0, 36^0 e 72^0.

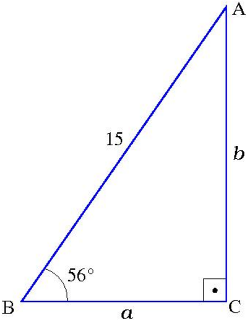
- Use o fato de que:

$$\mathrm{sen}2\alpha = 2\mathrm{sen}\alpha . \cos\alpha$$

$$\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Exercício 01: Resolva o triângulo abaixo



- $\widehat{A} = 90^0 - 56^0 = 34^0$
- $\mathrm{sen}56^0 = \dfrac{b}{15} \Longrightarrow$

$$b = \mathrm{sen}56^0.15 \cong 0,83.15 = 12,45$$

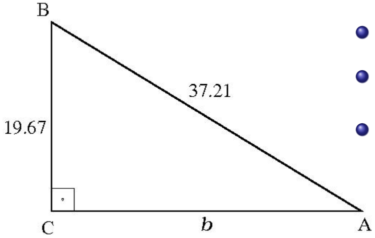
- $\cos 56^0 = \dfrac{a}{15} \Longrightarrow$

$$a = \cos 56^0.15 \cong 0,56.15 = 8,4$$

Exercício 02: Um atirador aponta a sua arma para uma pessoa que está amarrada em uma parede a 500 metros de distância. Na hora do disparo, houve um desvio para a direita de apenas 1^0.

- Supondo que o atirador só poderá realizar um único disparo, quais as chances do prisioneiro?
- Haverá um desvio de aproximadamente $8,7m$. O prisioneiro não morrerá por isso.

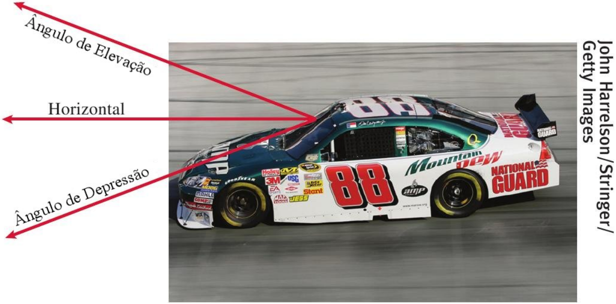
Exercício 03: Resolva o seguinte triângulo:



- $\mathrm{sen}\widehat{A} = \dfrac{19.67}{37.21} \cong 0,53$
- $\widehat{A} = \mathrm{sen}^{-1}(0,53) = arcsen(0,53) = 32^0$
- $\widehat{B} = 90^0 - 32^0 = 58^0$
- $\cos\widehat{A} = \dfrac{b}{c} \Longrightarrow b = (\cos 32^0) \times (37.21)$

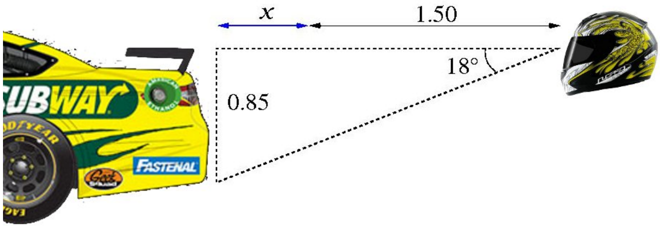
$$\Longrightarrow b \cong (0.85) \times (37.21) = 31.63$$

Exercício 04: Um piloto dentro de um carro de corrida tem uma visão bastante limitada...



Exercício 04: Suponha que a linha de visão horizontal do piloto do carro 19 coincide com o ponto mais alto da traseira do carro 2. O ponto mais baixo da traseira do carro 2 pode ser visto pelo piloto do carro 19 sob um ângulo de depressão igual a 18^0. A distância do ponto mais baixo ao ponto mais alto da traseira do carro 2 é de 85cm. Sabendo que a distância entre a cabeça do piloto e a dianteira (ambos do carro 19) é de 1,5m, calcule a distância que há entre os dois carros (2 e 19).

A figura abaixo mostra uma interpretação geométrica para o problema



- $\mathrm{tg}18^0 = \dfrac{0.85}{x+1.5} \Longrightarrow 0.32 \times (x+1.5) = 0.85$
- $\Longrightarrow 0.32x = 0.37$
- $\Longrightarrow x \cong 1.16m$