Introdução - Ângulos

Prof. Márcio Nascimento

marcio@matematicauva.org

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Matemática Básica II - 2016.2

15 de fevereiro de 2017

Sumário

Sumário

Disciplina: **Matemática Básica II** - **Trigonometria (60h)**

Fluxo: **2012**

Pré-Requisitos: **Matemática Básica I – Relações e Funções**

Ementa: Trigonometria no triângulo. Trigonometria na Circunferência. Funções Trigonométricas. Funções trigonométricas inversas. Identidades Trigonométricas. Trigonometria num triângulo qualquer. Equações trigonométricas. Coordenadas Polares. Produção de vídeos didáticos com aplicações da trigonometria.

Aulas:
Fevereiro: 14, 21
Março: 07, 14, 21, 28
Abril: 04, 11, 18, 25
Maio: 02, 09, 16, 23, 30
Junho: 06, 13, 20
Avaliações:
AP01 (18/04)
AP02 (06/06) Entrega dos vídeos
AP03 (13/06)
AF (20/06)
Média: (AP01+AP02+AP03)/3
OBS: Textos/Vídeos para estudo complementar!

Sumário

A palavra trigonometria tem origem na Grécia:

$$\tau\rho\iota\gamma\varpi\nu o\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$$

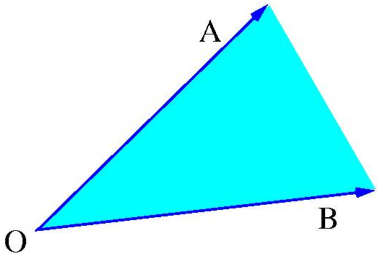
- $\tau\rho\iota\gamma\varpi\nu o$ (Triângulo) + $\mu\varepsilon\tau\rho\eta\sigma\eta$ (medida);
- A 'Ciência dos Triângulos';
- Surgiu devido as necessidades da Astronomia, Navegação e Cartografia;
- Vocábulo criado em 1595 pelo matemático alemão Bartholomaus Pitiscus (1561-1613).

- Hiparco de Nicéia: Considerado o “Pai” da Trigonometria, viveu em torno de 120 a.C.
- Construiu tabelas de cordas (predecessoras das tabelas de senos).
- Organizou a confecção de um catálogo de estrelas e um calendário de equinócios.

Sumário

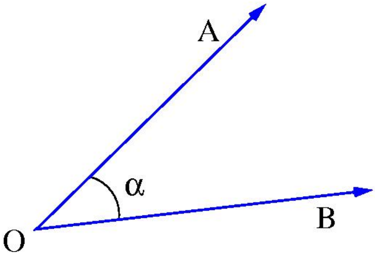
Ângulo: palavra que origina do Latim *angulum* (esquina, canto).

- É a figura formada por duas semi-retas de mesma origem.



- Notação: $A\widehat{O}B$ ou $B\widehat{O}A$ ou, ainda, $\angle AOB$
- $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$: lados do ângulo.

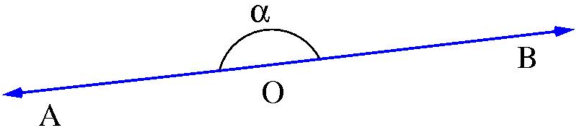
Geralmente são usadas letras gregas ou letras “de forma” para representar um ângulo:



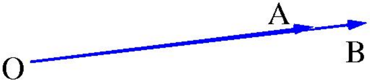
- $\alpha = A\widehat{O}B = \angle AOB = \widehat{O} = O$

Alguns ângulos recebem nomes especiais:

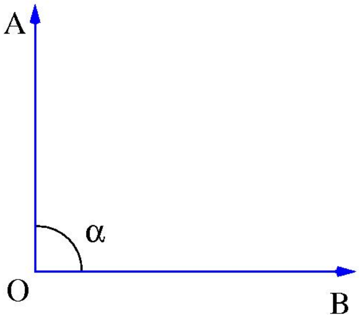
- **Ângulo raso:** Quando as semirretas têm a mesma direção mas sentido oposto.



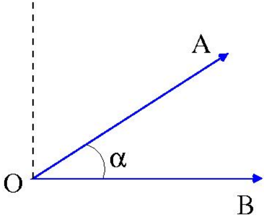
- **Ângulo nulo:** Quando as semirretas têm a mesma direção e sentido.



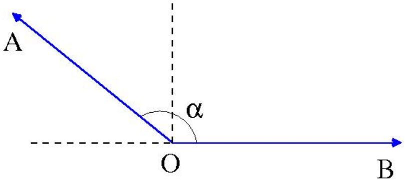
- **Ângulo reto:** Quando as semirretas são perpendiculares.



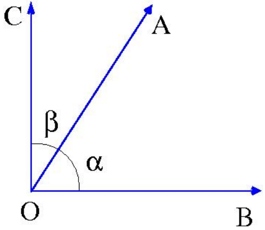
- **Ângulo agudo:** Quando o ângulo formado é menor que um ângulo reto.



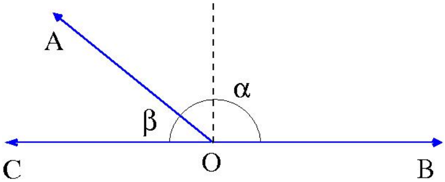
- **Ângulo obtuso:** Quando o ângulo formado é menor que um ângulo raso e maior que um ângulo reto.



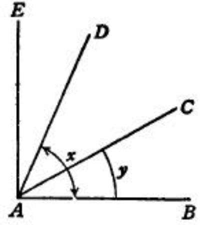
- **Ângulos Complementares:** ângulos que quando justapostos formam um ângulo **reto**.



- **Ângulos Suplementares:** ângulos que quando justapostos formam um ângulo **raso**.



- **Ângulos Adjacentes:** Quando dois ângulos têm o mesmo vértice e uma das semirretas é um lado comum.

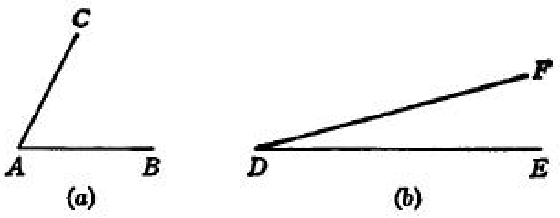


$\angle BAC$ e $\angle CAD$ são adjacentes.

Medida de um ângulo

Quando falamos em **medida de um ângulo** nos referimos à abertura entre as semirretas.

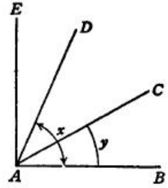
- Por exemplo, na figura abaixo, $\angle BAD$ é maior do que $\angle DEF$.



Uma vez que podemos comparar, faz sentido falar em **álgebra de ângulos**, isto é, podemos somar e subtrair:

- Por exemplo, na figura abaixo,

$$\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD \qquad , \qquad x - y = \angle CAD$$

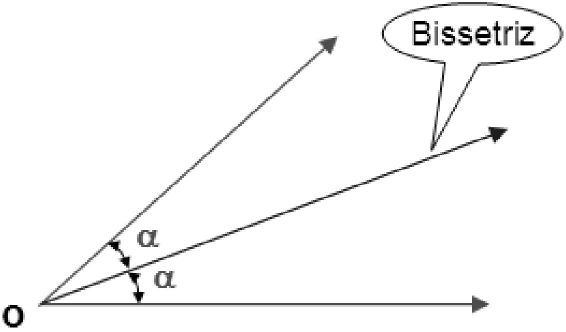


- Da mesma forma, faz sentido multiplicar (ou dividir) um ângulo por um número real:

$$2(\angle BAC),\ \frac{1}{3}(\angle CAD), \ldots$$

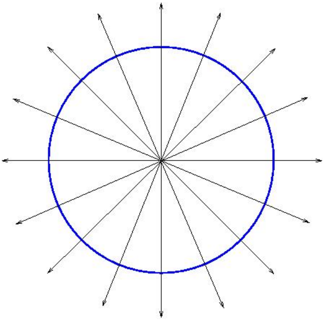
Se a partir do vértice de um ângulo traçamos uma semirreta, interior ao ângulo, então estamos **dividindo** este ângulo.

- Quando tal reta divide o ângulo em duas partes iguais, tal reta é chamada **bissetriz do ângulo**.



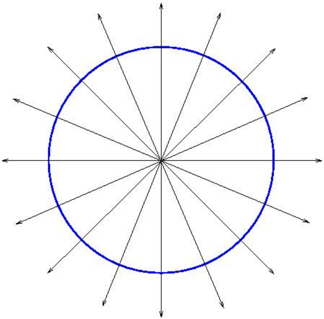
Sumário

Unidade de Medida - Grau



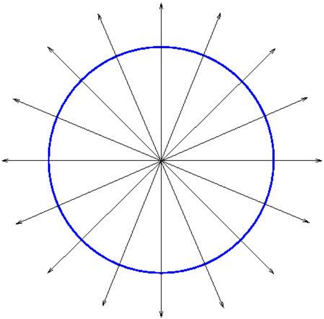
- Imagine várias semirretas partindo de um mesmo ponto, como mostra a figura ao lado.
- Considere que o ângulo determinado por quaisquer duas semirretas consecutivas é sempre o mesmo.
- Se tivermos 360 semirretas, teremos 360 ângulos iguais. Cada um deles será chamado **grau**.
- Notação: 1^0.
- Aparentemente, os Babilônios foram os primeiros a usar essa subdivisão.

Unidade de Medida - Grau



- **Exemplo:** De um mesmo ponto, partem 120 semirretas determinando ângulos iguais entre si. Qual a medida, em graus, de cada ângulo?
- Resposta: 3^0

Unidade de Medida - Grau



- A fração de $1/60$ de um grau é chamada **minuto**. Notação: $\dfrac{1^0}{60} = 1'$
- E a fração de $1/60$ de um minuto, é chamada **segundo**. Notação $\dfrac{1'}{60} = 1''$

Unidade de Medida - Grau

Exemplo: Considere um círculo de raio R. De seu centro O, partem 175 semirretas determinando ângulos iguais entre si.

- **Qual a medida em graus de cada ângulo?**
- Aproxidamente $2,06^0$
- **Qual a medida em minutos de cada ângulo?**
- Aproximadamente $123,43'$
- **Qual a medida em segundos de cada ângulo?**
- Aproximadamente $7405,71''$

Unidade de Medida - Grau

Observação: Em vez da notação decimal, algumas vezes é interessante usar graus, minutos e segundos na mesma representação

- $2,5^0 = 2^0 + 0,5^0 = 2^0 + (0,5).60' = 2^0 30'$
- $3,12^0 = 3^0 + 0,12^0 = 3^0 + (0,12).60' = 3^0 + 7,2' = 3^0 + 7' + 0,2' = 3^0 7' + 0,2(60'') = 3^0 7' 12''$

Unidade de Medida - Grau

Exemplo: Dados os ângulos $A = 124,389^0$ e $B = 75,765^0$,

- **Converta A e B para a notação grau/minuto/segundo**
- $A \cong 124^0 23' 20''$ e $B = 75^0 45' 54''$
- **Expresse $A + B$, $A - B$ na notação grau/minuto/segundo**
- $A + B = 200,154^0 \cong 200^0 9' 14''$ e
  $A - B = 48,624^0 \cong 48^0 37' 26''$

Unidade de Medida - Grau

Exemplo: Dados os ângulos $A = 42^0 27' 32''$ e $B = 27^0 32' 26''$, determine:

- $A + B$
- $69^0 59' 58''$
- $A - B$
- $14^0 55' 06''$
- $\frac{A}{2} + \frac{B}{3}$
- Aproximadamente $30^0 24' 32''$

Unidade de Medida - Grau

Exemplo: Dados os ângulos $A = 42^0 27' 32''$ e $B = 27^0 32' 26''$,

- **Converta A e B para a notação decimal**
- A é aproximadamente $42,46^0$ e B é aproximadamente $27,54^0$
- **Expresse $A + B$, $A - B$ na notação decimal**
- $A + B \cong 69,99^0$ e $A - B \cong 14,92^0$

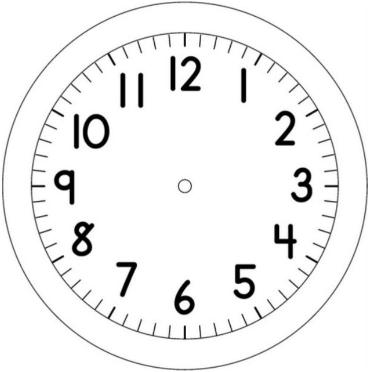
Unidade de Medida - Grau

Exemplo: Um relógio marca 2 : 25. Qual o menor ângulo entre os ponteiros de horas e minutos?

- Lembre que a cada 60 minutos, o ponteiro maior percorre 360^0 e o menor, 30^0.
- Portanto, em 1 minuto, o ponteiro maior percorre 6^0 e o menor $0,5^0$.
- Daí, às 2:25, o ponteiro maior terá percorrido (a partir do 12) $25 \times 6^0 = 150^0$ e o menor (a partir do 2), $25 \times 0,5^0 = 12,5^0$.
- Se o ponteiro das horas permanecesse fixo, o menor ângulo seria de $150^0 - 60^0 = 90^0$, mas como o ponteiro menor se movimentou $12,5^0$, segue que o ângulo procurado é de $77,5^0$.

Unidade de Medida - Grau

Exemplo: Determine o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio às:



- **15:35**
- $102,5^0$
- **18:10**
- 125^0
- **16:20**
- 10^0
- **12:33**
- $178,5^0$

Origem das palavras

- **Grau:** origem do latim - *gradu* - que significa *degrau*.
- **Minuto:** primeiras menores partes - *partes <u>minutae</u> primae*
- **Segundo:** segundas menores partes - *partes minutae <u>secundae</u>*